数学分析课程中的开放型问题

王卫兵,唐　唯
（湖南科技大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要:数学开放题是一种较新的题型,有很多的优点。在数学分析课程教学过程中,立足教材,适当地编制开放型问题,进行开放型问题教学, 有利于激发学生学习兴趣,提升教学效果。

关键词:数学开放题;数学分析;教学
中图分类号:G420　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1674－5884(2014)11－0047－02

数学分析课程是普通高校数学专业最重要的专业主干课程,是多门后续分析类课程的基础,如常微分方程、复变函数、实变函数、泛函分析,为其提供必要的基础知识、方法与技巧。其特点是体系严密,知识容量大,逻辑性强,应用广泛。数学分析中概念、定义、公式、定理、方法技巧众多,蕴含着丰富的数学思想方法。目前,数学分析的教学在模式上注重概念、定理、公式的讲解, 通常主要结论按照一定模式进行论证和解答,比较忽视启发学生自己去发现问题、提出问题、解决问题。

数学开放题是上世纪70年代发展起来的一种新题型,在一定条件下探索不明确结论,或由给出的结论探索使结论成立的条件[1]。在开放型问题中,条件可能不完善,需要补充;或满足结论的条件有多种;或结论不唯一;或解决问题的方法不唯一。开放型问题的答案常常不确定,没有固定的解题模式,思维发散性大,这种特性决定了教师无法采用灌输式教学,学生必须积极参与,主动地进行探索。数学开放型问题的教学有利于培养学生的数学意识、分析能力、综合能力、抽象能力、推理能力;有利于培养学生的探索精神和创新能力。

数学分析教材中众多的定理、命题、习题,一般由确定的条件导出确定的结论。但许多命题、习题可加以改编成为开放型问题。在教学过程中,立足教材,适当地编制开放型问题,进行一些开放型问题的训练,可大大提升教学效果。

1　隐藏原命题的部分条件,反向探求新条件

得到某一结论的条件通常不是唯一的。隐藏部分条件,探索使结论成立需添加的因素,可将原题改编为开放问题。

例1　数列收敛的充要条件是它的所有子列都收敛。将该命题中的充分条件减弱便可得到若干开放问题。

问题1　数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛。在什么条件下,数列 $\{a_n\}$ 收敛?

问题2　数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{3n}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n-2}\}$ 都收敛。在什么条件下,数列 $\{a_n\}$ 收敛?

也可考虑上述问题的反面。

问题3　求一发散数列 $\{a_n\}$, 其收敛子列的极限都相等。

例2　（原题）已知函数 $f\in C[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)$, 则存在 $r\in(0,1)$ 使得 $f(r+0.5)=f(r)$.

问题4　函数 f 满足什么条件时存在 $r\in R$ 使得 $f(r+0.5)=f(r)$?

2　拓展已有的结论

数学分析课程中很多命题、习题蕴含着丰富的信息。通常教师、学生解完题后就不再深入地思考还能得到什么样的结论。将其结论进行拓展,深挖,进一步探索新的结论,可得到某些开放型问题。

例3　（原题）已知 $f'(a)=A$ 存在,求极限 $\lim\limits_{h\to0}h^{-1}(f(a+2h)-f(a))$。

问题5　若 $\lim\limits_{h\to0}h^{-1}(f(a+2h)-f(a))=A$ 存在,问极限 $\lim\limits_{h\to0}h^{-1}(f(a+2h)-f(a-h))$ 是否存在? 若存在,其值等于多少?

例4　拉格朗日中值定理:设函数 f 在闭区间 $[a,b]$

收稿日期:2014－04－30
作者简介:王卫兵(1976－　),男,湖北鄂州人,副教授,博士,主要从事微分方程及应用研究。

内连续,在开区间 (a,b) 内可导,则存在 $r \in (a,b)$ 使得 $f(b) - f(a) = f'(r)(b - a)$.

上述定理中仅仅肯定了 f 的存在性,对这样的 f 的个数信息不明。我们可以问:

问题 6　在什么条件下,中值定理中的 f 的个数是 1,是 2,甚至是 f 个?

问题 7　设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续,在开区间 (a,b) 内可导, $r \in (a,b)$,是否存在不同的两点 $s,t \in [a,b]$ 使得 $f(s) - f(t) = f'(r)(s - t)$? 在什么情形下是存在的?

3　改变条件,探索新结论

命题或习题条件的变化,其结论也随之变化。适当变化相关的条件， 引导学生探求对结论的影响，有利于开阔学生思路,巩固所学知识。

例 5 重要的极限 $f(x) = (1 + x)^{x^{-1}} \to e(x \to 0)$. 很显然函数 f 是幂指数函数,其底

的极限为 1 $(x \to 0)$,指数的极限为 ∞ $(x \to 0)$. 考虑更一般的幂指数函数 $h(x)^{g(x)}$.

问题 8 若 $h(x) \to 1$, 时, $h(x) \to 1, g(x) \to \infty$. 幂指数函数 $h(x)^{g(x)}$ 的极限是否存在? 存在时为多少?

例 6　当 $f(x), g(x)$ 时, $f(x), g(x)$ 与 $f(x), g(x)$ 是等价无穷小量。于是当 $f(x), g(x)$ 时, $f(x), g(x)$ 是无穷小量, 则 $\sin f(x)$ 时, $\sin f(x)$ 与 $f(x), \sin g(x)$ 与 $g(x)$, $\sin f(x) + \sin g(x)$ 与 $f(x) + g(x)$ 都是等价无穷小量。

问题 9　除 f 与 f 这一对等价无穷小量外,有其他的等价无穷小量有类似的性质吗?

例 7 罗尔定理。当函数满足罗尔定理中三个条件时,其结论成立,但三个条件不是必要的。

问题 10 删除三个条件中的 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续,这时函数 f 可能在端点处无定义,对应的将 $f(a) = f(b)$ 减弱为 $f(a+0) = f(b-0)$, 问罗尔定理的结论仍成立吗?

4　用实际问题表现数学命题

数学分析中很多概念、定义有深刻的实际背景。从广义上讲,数学分析中的基本概念:函数、极限、导数、微分、定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等都可看成数学模型。一些问题从实际背景出发,要求学生进行设计数学模型求解,便可得到开放型问题。这样不仅易于激发学生的学习兴趣,也有利于培养学生的探索精神和创新能力,提高数学素养。

例 7　连续函数的介值定理。

问题 11　一人早 6 点从山脚 A 处上山,晚 18 点到山顶 B 处;第二天,早 6 点从 B 处下山返回,晚 18 点到 A 处。问是否存在一时刻,这两天都在这一时刻达到同一点?

上述各例中问题 1、问题 2、问题 4 需要探求使结论成立的条件,其条件有很多种,有难有易,属于条件开放型问题;问题 3、问题 8、问题 9 的结论不唯一,属于结论开放型问题;问题 6、问题 7 条件与结论都需要探索,属于综合开放型问题。问题 5、问题 9、问题 10 需要综合应用所学内容,属于存在开放型问题[2-5]。不论哪一种开放型问题均需要学生积极参与,独立地探索, 观察、类比、分析、归纳、猜想。因此, 在数学分析教学中可适当选用开放型问题教学, 提供让学生操作、研究和讨论的机会。为了更好地适应这种教学模式,数学分析课程教学中要注重教学内容的内外结合,强调数学的实际背景和现实模型,展现知识的形成过程,让学生尽可能地参与到知识的发现、思维探求过程。

当然,数学分析课程中,并不是所有的内容都适合开放型问题教学。另外,开放型问题的教学耗时一般较多,适合在习题课上或以课后作业的形式进行。

参考文献:

[1] 张奠宇. 数学教育学导论[M]. 北京,高等教育出版社,2003.

[2] 万洪波. 浅议数学的开放型题型[J]. 南昌教育学院学报,2002(17)36 - 37.

[3] 张士勤. 数学分析中“开放型问题教学”浅析[J]. 南都学坛(自然科学版),1995(6)60 - 61.

[4] 李祥兆. 数学开放题的评分方法初探[J]. 宁波大学学报(教育科学版),2007(2)62 - 65.

[5] 李　华. 数学开放型题型与解法探析[J]. 数学学习与研究(教研版),2007(1)55 - 56.

(责任校对　王小飞)