结构位移计算中复杂图形图乘法技巧探析

孙洪鑫，汪建群
（湖南科技大学 土木工程学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要：以结构力学位移计算中复杂图形图乘法为背景，分析了图乘法的三个应用条件，总结了复杂图乘法的常用方法。以线荷载作用下悬臂梁中点竖向位移和变刚度悬臂梁端点竖向位移的两个计算实例，分析了构造标准抛物线图形的技巧，总结了图乘法分段图乘、加减相伴的图乘原则，对复杂图形图乘法的计算效率大大提高。

关键词：结构力学；位移计算；图乘法；技巧探析
中图分类号：G642　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674－5884(2014)10－0048－02

1　图乘法的基本公式

结构力学单位荷载法计算位移的一般公式中，由积分法计算梁或刚架杆件的结点或截面位移。若积分法满足如下三个条件：其一，杆件是直杆；其二，截面抗弯刚度 EI 为常数；其三，两个图形中至少有一个是直线图形时，可以采用图乘法求解结点或截面位移[1-2]。图乘法的应用简化了位移计算求解过程，减少了计算量。图乘法的发明是由当时为莫斯科铁路运输学院的学生 Vereshchagin 于 1925 年提出，该方法后以他的名字被命名为韦列夏金规则。位移积分法简化为图乘法的公式如式(1)，具体推导过程参见文献[3-4]。

$$\int_A^B \frac{M_i M_k}{EI} \mathrm{d}s = \frac{1}{EI}\omega y_0 \tag{1}$$

式中，M_i，M_k 中至少有一个图形是直线的弯矩图，EI 是截面抗弯刚度且为常数，A，B 是杆件积分区间，ds 是截面微段，ω 是曲线弯矩的面积（若两弯矩图均为直线，可任取），y_0 是曲线弯矩图的形心位置对应直线弯矩图的纵坐标。

2　复杂图乘法分析

结构力学教材中给出一般图乘法总结如下：

(1) 一个弯矩图形是曲线，一个是直线，纵坐标 y_0 应在直线中量取。

(2) 两个弯矩图形均是直线，弯矩面积 ω 和纵坐标 y_0 可以取自其中任一图形。

(3) 一个图形是曲线，另一个图形是由几段直线组成的折线，应分段计算，但要注意求解分段曲线面积时，能否利用标准抛物线公式。

(4) 杆件各段有不同的 EI，则应在 EI 变化处分段，再进行图乘。

(5) 两个图形均是梯形时，如图 1 所示，可以直线采用式(2)，

$$S = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc) \tag{2}$$

式中括号内 a，b，c，d 同侧为正，异侧为负。特殊情况一个梯形为三角形，式(2)的 a，b，c，d 中一项为 0，问题得以简化。

(6) 一个弯矩图为非标准抛物线，一个是直线形，可以分解为(1)和(5)情况的叠加。

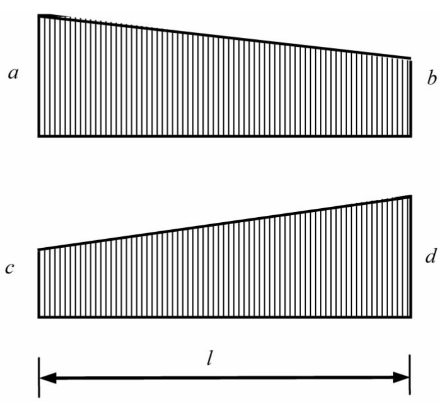

图 1　梯形弯矩叠加图乘

上述 6 种情况是图乘法常用方法，具体求解结构位移时，可采用其中的一种或多种情况相配合，合理利用上述情况，是避免图乘错误的关键。如求图 2(a) 中点竖向位移时，除了文献 2 介绍的两种方法外，还有考虑把 $\bar{M}_1$ 三角形

收稿日期：2014－04－18
基金项目：2012 年湖南科技大学教学研究与改革项目编号(G31201)；国家教育部高教司创新试验区课题
作者简介：孙洪鑫(1980－　)，男，河南沈丘人，副教授，博士，主要从事结构与桥梁工程的教学与研究。

弯矩图形延长至 B 端,具体计算过程见第三节内容。

3　复杂图乘法实例分析

任何图乘法复杂图形均可分解或构造成几个简单图形。本节分析两个实例,扩展对图乘法应用与理解;

实例一,求解图 2(a)中点竖向位移,(EI = 常数)

除文献 4 介绍的两种方法外,还可以采用延长 $\bar{M}_1$ 弯矩图形的方法。图 2 中 M_p 弯矩图分解为 ω_1 和 ω_2,ω_1 沿整个 l 长度为标准二次抛物线,对应形心位置为 y_1;同样 ω_2 沿右端 $l/2$ 长度为标准二次抛物线,对应形心位置为 y_2;两者所得位移相减,即为 Δ_C 的竖向位移,如式(3)。

$$\Delta_c = \omega_1 \cdot y_1 - \omega_2 \cdot y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2\cdot l\cdot\frac{l}{4} - \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{8}\right)\right] = \frac{17ql^4}{384EI}(\downarrow) \tag{3}$$

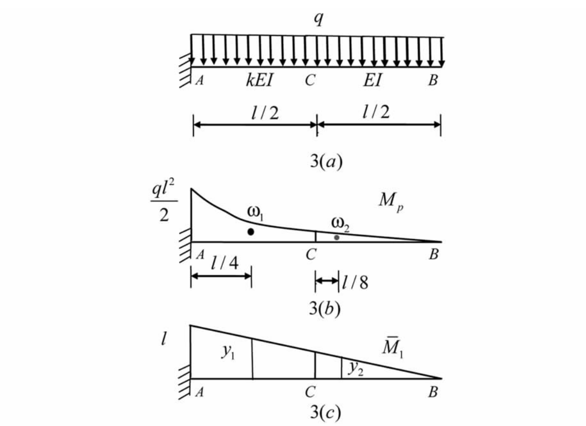

图 2　悬臂梁中点位移求解示意

实例二,求解图 3(a) B 点竖向位移,(沿杆件各段 EI 不同)

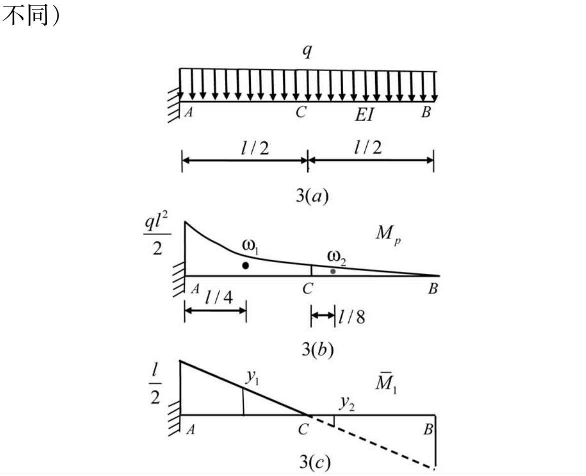

图 3　变刚度悬臂梁端点位移求解示意

由于沿直杆 EI 不同,常用方法必须采用分段图乘。但由图 3(b)图,AC 段弯矩图为非标准二次抛物线,该图形的形心位置不易确定。目前掌握的方法有两种:一种是分段叠加法,对 AC 段的 M_p 图分解为一个梯形图与一个标准二次抛物线图的相减;另一种是荷载分解形式,即 CB 段荷载传递至 AC 段的荷载分解为:一个竖向集中力 $ql/2$,一个 C 端点的集中力偶 $ql^2/8$,则 AC 段的弯矩图即可分解为一个矩形图、一个三角形和一个标准抛物线图。除上述两种方法外,结合实例分析一方法,该题可采用图乘减法分析法进行端点位移求解。AC 段的抗弯刚度 kEI,与 CB 段的 EI 统称按 kEI 处理,相当于把 CB 段的 EI 提高了 k 倍,然后再加上 CB 段未提高刚度部分引起的结构位移,如式(4)。

$$\Delta_c = \omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 = \frac{1}{kEI}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2\cdot l\cdot\frac{3l}{4}\right) + \left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{kEI}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{3l}{8}\right) \tag{4}$$

当 $k = 2$ 时,$\Delta_c = \dfrac{17ql^4}{256}$

$k = \dfrac{1}{2}$ 时,$\Delta_c = \dfrac{31ql^4}{128}$

式(4)计算过程比上述两种方法简单,使复杂的图形计算效率提高且易理解。

4　结　语

结构位移计算的图乘法是求梁及刚架最常用的方法,也是超静定结构力法求解的基础。利用图乘法时必须掌握三个应用条件,同时应熟练运用图乘法技巧。本文采用了一种分段图乘,加减相伴的原则分析法,有效构造了图乘法中的标准面积与形心的位置,使图乘计算效率得以提高,且概念易于理解。

参考文献:

[1] 龙驭球, 包世华, 匡文起, 袁驷. 结构力学教程(I)[M]. 北京:高等教育出版社,2001.

[2] 包世华. 结构力学(上册)[M]. 武汉:武汉理工大学出版社,2010.

[3] 单建. 趣味结构力学[M]. 北京:高等教育出版社, 2008.

[4] 孙庆巍. 谈结构力学图乘法应用中复杂图形的图乘技巧[J]. 土木建筑教育改革理论与实践, 2009(11):34 -36.

(责任校对　龙四清)