论实变函数第一堂课的相关问题及作用

唐古生

(湖南科技大学 数学系,湖南 湘潭 411201)

摘 要: 实变函数课程是数学分析的一门后继课程,它是数学分析理论的深化和继续,也是学生学习泛函分析、概率论、拓扑学、偏微分方程、调和分析和分形理论等现代数学的基础,因此具有承上启下的作用。但该课程相对数学分析等基础课程,在概念和方法上都有较大飞跃,更加抽象和更加理论化。实变函数一向被认为是数学专业本科阶段最难学的课程之一,许多数学本科学生都对这门课程望而生畏,所以如何克服学生的恐惧心理,激发学生学习兴趣,上好第一堂课,往往具有决定性的作用。

关键词: 数学分析;实变函数;Rieman 积分;Lebesgue 积分

中图分类号: G6421,O171　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1674-5884(2014)10-0025-03

由于实变函数的高度抽象和概括,使得这门课程在学生心目中有一种先入为主的恐惧心理,因而在第一堂课上不能急于进行正式内容的教学活动,而应着重介绍实变函数论课程的内容框架、发展历史、以及要达到的目的,阐述该课程的基本特点。实变函数论是在集合论与 Rieman 积分的基础上产生和发展起来的,许多性质、概念、定义与数学分析有着相似之处,但在很多方面有着质的飞跃。对于实变函数的学习,第一堂课中回顾数学分析中 Rieman 积分的缺陷,找出 Rieman 积分的缺陷的根源,从而分析对症下药的方法,指出拓展 Rieman 积分所需的理论准备,展望 Lebesgue 积分的优越性会激发学生对实变函数的学习兴趣。

1 分析数学分析中 Rieman 积分的缺陷

实变函数的核心是推广 Rieman 积分建立 Lebsgue 积分,因而作为教师应清楚数学分析中 Riemann 积分的概念,应善于从概念中分析引导起缺陷。

设 $f(x)$ 定义于区间 $[a,b]$ 上的有界实值函数。在区间 $[a,b]$ 上作分划

$T: a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i \cdots < x_n = b$

对每个 i,令

$m_i = \inf\{f(x): x \in [x_{i-1},x_i]\}, M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1},x_i]\}$

$E[y_{i-1} \leqslant f < y_i] = \{x \in E: y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}$

令 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x_i - x_{i-1}\}$,取 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$,定义 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Rieman 积分为

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Rieman 可积的充要条件是:

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = 0$$

这样为保证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点不能太多。正因 Riemann 积分对被积函数的连续性要求太强,这个定义及由此产生的有关积分理论存在一系列缺陷:

(1)黎曼意义下可积的函数类范围太小。典型的不 R 可积的例子如:

例题 1):Dirichlet 函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为}[0,1]\text{ 中的有理数} \\ 0, x \text{ 为}[0,1]\text{ 中的无理数} \end{cases}$$

例题 2):$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0,1] \\ 0, x = 0 \end{cases}$

这样的简单函数却不是 R(常义)可积的。

(2)R 积分与极限可交换顺序的条件太苛刻。在数学分析中,交换函数列极限与积分的顺序,需要函数列一致收敛的条件来保证,而能够达到一致收敛条件的函数列并不多,并且一致的条件也难以验证。

收稿日期: 2014-04-18

基金项目: 湖南省自然科学基金资助(2014JJ4044)

作者简介: 唐古生(1966-),湖南邵阳人,博士,副教授,主要从事非线性分析与数学教学研究。

例题 3)：$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}\\0 & x\in I\setminus\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}\end{cases}$

$D(x)=\begin{cases}1 & x\in \mathbf{Q}\cap I\\0 & x\in P\cap I\end{cases}$，则 $f_n(x)\to D(x)(n\to+\infty)$，$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0$，但 $D(x)$ 不可积，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f(x)\mathrm{d}x$

(3)积分运算不完全是微分运算的逆运算。由微积分基本定理，我们知道可微函数的导数再积分能够得到原函数，但是已证明一个可微的函数求导以后可以不是 Riemann 可积的[1]。

(4)数学分析中，R 可积的充要条件没有用函数本身的性质来刻画，而用函数自身性质刻画的可积的充分条件又过于苛刻。

以上几点表明，Riemann 积分有不少缺陷，限制了 Riemann 积分的应用，因此有必要加以改进。20 世纪初，法国数学家 Lebesgue(1875－1941)创建了一种新的积分理论，称之为 Lebesgue 积分，Lebesgue 积分理论是 Riemann 积分理论的推广和发展。并且克服了 Riemann 积分的上述缺陷[2]。

2 分析改进 Rieman 积分的思路

如何改造积分定义来达到拓广积分范围的目的呢？让我们先分析一下造成这一缺陷的根本原因。由数学分析知：对任意分划

$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

对于例题 1)由正长度的区间内既有有理数又有无理数，所以恒有：

$S(T,D)-s(T,D)=1-0=1$

如果分划不是这样刻板地要求一定要从左到右分成区间的话，是有可能满足大小和之差任意小的。比如，只要允许将有理数分在一起，将无理数分在一起，那么大小和之差就等于零了。这就是问题的着眼点，首先让分化概念更加广泛，更加灵活，从而可将函数值接近的分在一起以保证大小和之差任意小[1]。

对于例题 2)，将区间 $[0,1]$ 等分成 n 等份，取 $\xi_1=\frac{1}{n^4}\in[0,\frac{1}{n}]$，则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant\xi_1\cdot\Delta x_1=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^4}}}\frac{1}{n}=n\to+\infty\ (\lambda\to 0)$$

导致如此的原因，是在一个微小的区间内，函数值的变化太大。

3 引导学生感知数学新理论体系建立的奥妙

通过这一部分的分析，使学生感受到数学建立一套新的理论体系，需要环环相扣的理论准备。理论的严谨性是数学的妙趣之所在。

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界实值函数。前面已经提到，为使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，必须使 M_i-m_i 比较大的那些小区间的长度之和很小，或者应使函数是在一个微小的区间内，函数值的变化不太大。这样那些在很多地方振幅很大的函数或在微小范围内变化很大的就不可积了。为了使得更多连续性不好，函数值在微小范围内函数值变化很大的函数也可积，法国数学家 Lebesgue 提出了一种新的积分思想，主要想法就是不从分割区间 $[a,b]$ 着手，而是从分割函数的值域出发[3]。为简单计，这里只考虑 $f(x)\geqslant 0$ 的情况。设 $f(x)$ 定义于区间 $E=[a,b]$ 上，$m<f(x)<M$。在区间 $[m,M]$ 作分划

$T:m=y_0<\cdots<y_{i-1}<y_i\cdots<y_n=M$

记

$E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]=\{x\in E:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{y_i-y_{i-1}\}$，定义 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分为

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}m(E[y_{i-1}\leqslant f<y_i])$$

(如果极限存在)。这样定义积分的好处在于，函数值的变化不大的自变量 x 已置于一个集合 $E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 之中。在该集合中，$f(x)$ 的振幅小于 λ，因此很多连续性不好的函数(例如 Dirichlet 函数)或在微小范围内函数值变化很大的函数对于上述和式极限不存在的缺陷就有可能克服，从而让更多函数纳入可积范畴。但是按照 Lebesgue 的方式定义积分首先要扫除一个障碍，就是必须使 $\{x\in E:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$ 可以量长度。但是一般情况下，$\{x\in E:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$ 不是区间，甚至也不是有限个不相交区间的并。为此必须将普通长度公理加以推广，使直线上比区间更一般的尽可能多的集，有一种类似于区间长度的度量。这导致了 Lebesgue 测度理论的建立。由于测度理论要经常地遇到集的运算和欧氏空间上的各种点集，因此本课程首先要介绍集合论和欧氏空间上集论的知识。因此本课程首先要介绍集合论和欧氏空间上点集的知识，然后介绍测度理论[4]。由于 Lebesgue 测度理论并不能给直线上的每个集定义测度，只能对一部分集即所谓“可测集”给出测度，因此要定义 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分，必须要求由 $f(x)$ 产生的型如 $\{x\in E:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$ 的集是可测集，这样的函数称为可测函数，只有对可测函数才能定义新的积分。因此在定义 Lebesgue 积分之前，需要讨论可测函数的性质。作了这些准备后，就可以定义 Lebesgue 积分并讨论 Lebesgue 积分的性质及其应用。

4　激发学生强烈的求知欲望

在测度理论的基础上建立的 Lebesgue 积分理论到底有何优越性? 由于学生学识所限,不必过于讲的详细与深奥,我们只需给出以下几点,足可让学生感到惊奇,激发学生的强烈求知欲望。

(1)得到了用函数本身性质刻画 Riemann 可积的充要条件,函数 Riemann 可积的充要条件是不连续的点所构成的集合是一个零测集。

(2)极限与积分交换要求相对没有这么强,Riemann 积分要求一致收敛,而 Lebesgue 积分只要有一个控制收敛定理保证。

(3)得到的 Fubni 定理,可以使得累次积分交换积分次序可以在非常宽松的条件下实现。

(4)函数作为一个距离空间的完备性,Riemann 可积类的函数序列极限可能不是 Riemann 可积的,也就是基本点列的极限不在其中,而 Lebesgue 可积类构成的函数空间(当然其中的点应该换成为是几乎处处相等的函数类)是完备的距离空间[5]。

由此看出,法国数学家 Lebesgue 在测度基础上建立的 Lebesgue 积分,弥补了 R 积分的诸多不足。实变函数论一方面可以为以后的数学学习和数学思维能力的培养奠定坚实的理论基础, 另一方面可以再返回去温习数学分析 Rieman 积分、重积分、级数收敛的基本理论, 加强自身数学分析的理论功底[6]。通过以上分析与介绍,学生们会尽管觉得艰难与深奥,但在看到 Lebesgue 积分能如此极大的推进 Riemann 积分理论与克服 Riemann 积分的缺陷时,会极大增强他们的求知欲望,使他们觉得有勇气也有憧憬深入研究与学习这一门课程。

参考文献:

[1] 程其襄,张奠宙,魏国强. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京:高等教育出版社,2010.

[2] 王军涛,宋林森. Riemann 积分与 Lebesgue 积分的比较[J]. 河南科技学院学报(自然科学版)2008,36(4):120 - 122.

[3] 陈　志.《实变函数》概念教学的探讨[J]. 宁夏大学学报(自然科学版),1990,11(4):69 - 73.

[4] 江泽坚,吴智泉. 实变函数论(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社,2007.

[5] 江　枫. Riemann 可积函数与连续函数[J]. 宁德师专学报(自然科学版),2010,22(3):288 - 290.

[6] 倪仁兴. 浅议实变函数与数学分析间的联系[J]. 绍兴文理学院学报,2001,21(3):93 - 97.

(责任校对　王小飞)