第 6 卷 第 5 期
2014 年 5 月
当代教育理论与实践
Theory and Practice of Contemporary Education
Vol. 6 No. 5
May. 2014

复数教学中学生创新思维能力的培养

李重庚
(湘潭教育学院,湖南 湘潭 411100)

摘　要:通过 4 道例题,诠释复数教学中要求数学结论的叙述必须精炼、准确,对结论的推理论证周密而有条理;引导学生一题多解,一题多变,一题多用;课本中不少习题是某一问题的特例,教学时适当引伸推广,寻找一套规律,可以激发学生的学习兴趣;复数中有着数形结合的特征,教学时应引导学生仔细观察、联想,挖掘题目的隐含条件,找到解题思路获得最佳解法。通过对学生创新思维能力的培养,让师生体会人类理性思维在数系扩充中的作用,进一步明确复数的代数表示法及其几何意义。

关键词:高中数学;复数教学;创新思维能力
中图分类号:G633　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-5884(2014)05-0012-03

复数是高中数学选修内容中涉及面广、知识跨度大的内容,它与代数、几何、三角等有着密切的联系,是数学教学中的难点问题。通过复数案例教学,能培养学生严谨的思维能力、发散思维能力、创造思维能力、观察与联想思维能力。

1　培养严谨的思维能力

严谨性是数学学科的特点,它要求数学结论的叙述必须精炼、准确,对结论的推理论证周密而有条理。因此在教学时,可有意识地布置“陷阱”,来培养学生严谨的创新思维能力。

例1:已知 $|Z|=1$,且 $Z(Z^4+1)=1$,求复数 Z[1]。

解:(这是教学中大多数学生采用的)

把 $Z(Z^4+1)=1$ 转化为 $Z^5=1-Z$,两边取模为 $|Z^5|=|1-Z|$,即:$|1-Z|=1$。

令 $Z=x+yi(x,y\in R)$,代入上式,并利用 $x^2+y^2=1$ 得 $Z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$Z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

评析:此题解答所得的结果是正确的,但在解题过程中,采取了等式两边取模的做法值得考虑,这种做法不都是正确的。因为在一个等式两边取模所得的等式与原等式一般是不等价的,如:$x+yi=3+4i$ 与 $|x+yi|=|3+4i|$ 是不等价的,前者仅表示点(3,4),而后者表示以 0 为圆心,5 为半径的圆。

错误原因:在上述解答过程中,由 $Z^5=1-Z$ 两边同时取模 $|Z|^5=|1-Z|$,忽视了方程变形中的等价性,事实上,$Z^5=1-Z$ 是 $|Z|^5=|1-Z|$ 成立的充分而非必要条件。故易产生增根。因此,所求的结果是否合乎题意,需经检验方可确认。若将原题改为:已知 $|Z|=1$,且 $Z(Z^6+1)=1$,求复数 Z。按上述方法,同样可求得:

$$Z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ Z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

但经检验不合要求。

解 1:令 $Z=\cos\theta+i\sin\theta$, $\theta\in(0,2\pi)$,代入 $Z(Z^6+1)=1$ 得

$$(\cos7\theta+\cos\theta)+i(\sin7\theta+\sin\theta)=1$$

即 $2\cos4\theta\cdot\cos3\theta+i2\sin4\theta\cdot\cos3\theta=1$

故有:$\cos4\theta\cdot\cos3\theta=\frac{1}{2}$　　(1)

$\therefore\cos3\theta\neq0$　$\sin4\theta=0$

$\sin4\theta\cdot\cos3\theta=0$

$\therefore\theta=0,\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$,分别代入(1)式,均不满足。

$\therefore$ 所求的 Z 不存在。

解 2:由原式的 $Z(Z^6+1)=1$,则 $Z^7=1-Z$,两边取模为:$|Z|^7=|1-Z|\Rightarrow|1-Z|=1$。

令 $Z=x+yi(x,y\in R)$ 代入上式,并利用 $x^2+y^2=1$,得

收稿日期:2013-12-10
作者简介:李重庚(1964-),男,湖南湘潭人,中学特级教师,主要从事中学数学教学与学校管理研究。

$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

对比上述两种解法,解 2 的错误不言自明。

2　培养发散思维能力

发散思维是一种不依常规寻求变异,多方面寻求答案的一种思维形式。在复数教学中,引导学生一题多解,一题多变,一题多用可以培养学生的发散思维能力。

例2:已知复数 Z_1、Z_2 满足 $|Z_1| = |Z_2| = 1$,且 $|Z_1 - Z_2| = \sqrt{2}$,求 $|Z_1 + Z_2|$ 的值[2]。

解 1:设 $Z_1 = a + bi, Z_2 = c + di, (a、b、c、d \in R)$,

则有 $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$,且 $(a - c)^2 + (b - d)^2 = 2$

$\therefore\ ac + bd = 0$

$\therefore\ (a + b)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) = 2$

$\therefore\ |Z_1 - Z_2| = \sqrt{2}$

解 2:设 $Z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, Z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2, \theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$,

则有 $(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 = 2$ $\therefore \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

$\therefore (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 = 2$,即

$|Z_1 + Z_2| = \sqrt{2}$

解 3:因 $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 2, |Z_1 - Z_2|^2 = 2$,

故有 $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = |Z_1 - Z_2|^2$,如图 1 所示。

设 Z_1, Z_2 对应的点分别为 A、B,

则有　$|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2$

$\therefore$ $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形。又 $|Z_1 + Z_2|$ 是以 OA、OB 为边的平行四边形的对角线 OC,而这个平行四边形是正方形。

故 $|Z_1 + Z_2| = |OC| = |AB| = \sqrt{2}$

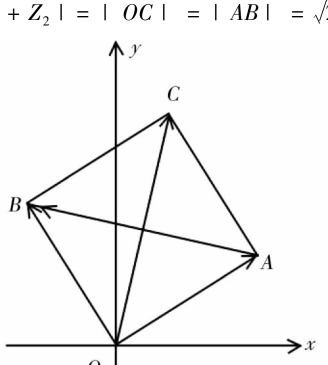

图 1

解 4:由 $Z_1 . \overline{Z_1} = |Z_1|^2 = 1, Z_2 . \overline{Z_2} = |Z_2|^2 = 1$,与 $(Z_1 - Z_2)(\overline{Z_1} - \overline{Z_2}) = |Z_1 - Z_2|^2 = 2$,及 $Z_1 \overline{Z_2} + Z_2 \overline{Z_1} = 0$,与 $(Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1} + \overline{Z_2}) = Z_1 \cdot \overline{Z_1} + Z_2 \cdot \overline{Z_2} + Z_1 \cdot \overline{Z_2} + Z_2 \cdot \overline{Z_1} = 1 + 1 + 0 = 2$,

$\therefore\ |Z_1 + Z_2| = \sqrt{2}$

解 5:$\because\ |Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2|Z_1|^2 + 2|Z_2|^2$

$\therefore\ |Z_1 + Z_2|^2 = 2 + 2 - 2 = 2$

$\therefore\ |Z_1 + Z_2| = \sqrt{2}$

解 6:由题设,得 $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = 1$, $\left|\frac{Z_1}{Z_2} - 1\right| = \frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_2|} = \sqrt{2}$

故 $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|$ 在复平面内所对应的点是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ 的交点,易求得交点坐标为 $(0, \pm 1)$。

故 $Z_1 = \pm iZ_2$

$\therefore\ |Z_1 + Z_2| = \sqrt{2}$

解 7:因 $|Z_1| = |Z_2| = 1$,如图 2 所示,设 Z_1、Z_2 对应的点分别为 A、B,则 A 与 B 在以原点为圆心,1 为半径的圆 O 上,作 A 关于 O 的对称点 P,则点 P 对应的复数为 $-Z_1$,且线段 AP 是圆 O 的直径,故 $\angle ABP = 90°$,由勾股定理得:

$|AP|^2 = |AB|^2 + |PB|^2$

即　$|Z_1 - Z_2|^2 + |Z_1 + Z_2|^2 = 2^2$

$\therefore\ |Z_1 + Z_2|^2 = 2$,即 $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{2}$

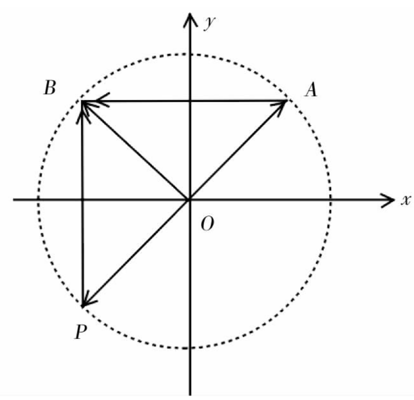

图 2

通过上述多种解法,学生的发散思维能力得到了提高。同时,趁热打铁,得到以下一些好的变式题,使学生的发散思维能力得到进一步提高。

(1) 设复数 Z_1、Z_2 满足 $|Z_1| = |Z_2| = 1$,且 $|Z_1 - Z_2| = \sqrt{2}$,求 Z_1/Z_2。

(2) 设复数 Z_1、Z_2 满足 $|Z_1| = |Z_2| = 1$,且 $|Z_1 - Z_2| = \sqrt{2}$,求证 Z_1/Z_2 为纯虚数。

(3) 设复数 Z_1、Z_2 满足 $|Z_1| = |Z_2| = 1$,且 $|Z_1 - Z_2| = \sqrt{2}$,求证对任意实数 a,恒有 $|Z_1 - aZ_2| = |aZ_2 + Z_1|$。

（4）设复数 Z_1、Z_2 在复平面内对应的点为 A、B，且 $|Z_1|=|Z_2|=1$，$|Z_1-Z_2|=\sqrt{2}$，求证 $\triangle AOB$ 为直角三角形。

3　培养创造思维能力

复数教学中，有不少习题是某一问题的特例，教学时适当引伸推广，寻找一套规律，可以激发学生的学习兴趣，并培养其探究的创造能力。

例 3：已知 Z_1、$Z_2\in C$，且 $Z_1\cdot Z_2=0$，求证 Z_1、Z_2 中至少有一个是 0。

把此题推广得：设 $Z_1,Z_2\cdots\cdots Z_n\in C$，且 $Z_1\cdot Z_2\cdots\cdots\cdots Z_n=0$，则 Z_1、$Z_2\cdots\cdots Z_n$ 中是否至少也有一个是 0？

探索：

$\because |Z_1\cdot Z_2\cdots Z_n|=|Z_1|\cdot|Z_2|\cdots\cdots|Z_n|$，又 $Z_1\cdot Z_2\cdots\cdots Z_n=0$

$\therefore |Z_1\cdot Z_2\cdots\cdots Z_n|=0$

$\therefore |Z_1|=0$ 或 $|Z_2|=0$ 或 $|Z_n|=0$，由复数模的几何意义得 $Z_1=0$ 或 $Z_2=0$ 或 $Z_n=0$

故 Z_1,Z_2,Z_n 中至少有一个为 0。

归纳得：

命题：设 $Z_1,Z_2,\cdots\cdots Z_n\in C$，则 $Z_1\cdot Z_2\cdots\cdots Z_n$ 中至少有一个是 0 充要条件是 $Z_1\cdot Z_2\cdots\cdots Z_n=0$，运用上述命题，可解答下列一些问题[3]：

（1）已知 $Z_1,Z_2,Z_3\in C$，且 $Z_1+Z_2+Z_3=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=1$，求证：$Z_1,Z_2,Z_3$ 中至少有一个复数是 1。

（2）已知 $Z_1,Z_2,Z_3\in C$，且 $\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=\frac{1}{Z_1+Z_2+Z_3}$，证明：三个复数 Z_1,Z_2,Z_3 分别对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2},\overrightarrow{OZ_3}$ 中至少有两个向量的和必为 0。

（3）已知 $Z_1,Z_2\in C$，$Z_1^2+Z_2^2=0$，则复数 Z_1 及 Z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 所在的直线相互垂直，且 $|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$。

4　培养观察与联想思维能力

由于复数中有着数形结合的特征，在教学时，应引导学生仔细观察，联想，挖掘题目的隐含条件，找到解题思路获得最佳解法。

例 4：已知 Z_1 与 Z_2 是非零复数，且 $|Z_1+Z_2|=|Z_1-Z_2|$，求证：$(\frac{Z_1}{Z_2})^2$ 一定是负数[4]。

本题若按常规解法，设 Z_1,Z_2 为代数形式，或三角形式，计算较繁，不可取。

若引导学生观察题目的条件和结论的形式，从条件 $|Z_1+Z_2|=|Z_1-Z_2|$ 作变式进行整体处理则可化繁为简，化难为易。

分析：要证 $(\frac{Z_1}{Z_2})^2<0$，观察条件，因为 Z_2 是非零复数，故可将 $|Z_1+Z_2|=|Z_1-Z_2|$ 转化为 $\left|\frac{Z_1}{Z_2}+1\right|=\left|\frac{Z_1}{Z_2}-1\right|$，然后引导学生从不同角度去观察与联想。

方法 1：（联想 $Z\cdot\overline{Z}=|Z|^2$）对等式两边平方为：$(\frac{Z_1}{Z_2}+1)[(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}})+1]=(\frac{Z_1}{Z_2}-1)[(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}})-1]$ 整理得：

$\frac{Z_1}{Z_2}+(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}})=0$，由此可知 $\frac{Z_1}{Z_2}$ 为纯虚数 $(\frac{Z_1}{Z_2}\neq 0)$

$\therefore (\frac{Z_1}{Z_2})^2$ 一定是负数。

方法 2：（联想复数的几何意义）

$\because \left|\frac{Z_1}{Z_2}+1\right|=\left|\frac{Z_1}{Z_2}-1\right|$，

$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}$ 的轨迹是与点 $(-1,0)(1,0)$ 等距离的点集，显然是 y 轴（除去原点），即 $\frac{Z_1}{Z_2}$ 为纯虚数。

$\therefore (\frac{Z_1}{Z_2})^2$ 一定是负数。

方法 3：（联想复数模的有关概念）设 $\frac{Z_1}{Z_2}=x+yi(x,y\in R)$，

由模的定义可得：$(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+y^2$

$\therefore X=0(y\in R)$，但 $\frac{Z_1}{Z_2}\neq 0$，$\therefore y\neq 0$

$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}$ 为纯虚数　　$\therefore (\frac{Z_1}{Z_2})^2$ 一定是负数。

参考文献：

[1] 杨玉蓉. 高中数学解题分析大全[M]. 北京：科学技术文献出版社，1999.

[2] 丁尔陞. 高中数学教学指导书[M]. 北京：人民教育出版社，2002.

[3] 冯士腾. 高中数学（下册）[M]. 北京：科学技术文献出版社，1999.

[4] 胡如松. 复数的高考题型分析及其复习建议[J]. 理科考试研究：高中版，2000，8(11)：16 – 18.

（责任校对　龙四清）