第 6 卷 第 2 期
2014 年 2 月

当代教育理论与实践
Theory and Practice of Contemporary Education

Vol. 6 No. 2
Feb. 2014

重积分换元法中积分区域的转换

李国平

（湖南工学院 数理教学部，湖南 衡阳 421002）

摘　要：重积分换元法在换元过程中主要包括被积函数的变换和积分区域的转换，被积函数的变换较固定，而积分区域的转换相对灵活，学生在学习时不易理解和掌握。提出了积分区域转换的一种新方法，该方法能使积分区域的转换也变得相对固定，学生学习起来更易掌握。

关键词：高等数学；重积分；换元法；积分区域的转换

中图分类号：O13　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1674 - 5884(2014)02 - 0134 - 02

1　积分区域为特定区域的重积分的求解方法[1]

定理 1.1　二元函数 $f(x,y)$ 在 x 型区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$（或 y 型区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d, x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\}$）上连续，则

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\ \left(\text{或}\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)$$

定理 1.2　三元函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_{xy}, z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}$ 上连续，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

其中 D_{xy} 为平面 xoy 上的闭区域

定理 1.3　三元函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant z\leqslant b,(x,y)\in D(z)\}$ 上连续，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D(z)$ 为过 Ω 内任一点 (x,y,z) 且与平面 xoy 平行的平面与 Ω 的截平面区域

2　重积分的换元法

2.1　二重积分换元法[1]

若 $f(x,y)$ 在平面 xoy 上的闭区域 D_{xy} 上连续，变换 T：$x=x(u,v), y=y(u,v)$ 将平面 uov 上的闭区 D_{uv} 域变成平面 xoy 上的闭区域 D_{xy}，且满足：

(1) $x(u,v), y(u,v)$ 在 D_{uv} 上具有一阶连续偏导数；

(2) 在 D_{uv} 上雅可比行列式2

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D_{xy}\to D_{uv}$ 是一对一的，

则有

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\mid J\mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{2.1}$$

2.2　三重积分换元法[1]

对于三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 作变量替换，即

$$\begin{cases} x=x(r,s,t), \\ y=y(r,s,t), \\ z=z(r,s,t). \end{cases}$$

它给出了空间 $Orst$ 到空间 $Oxyz$ 的一个映射，若 $x=x(r,s,t), y=y(r,s,t), z=z(r,s,t)$ 在空间闭区域 Ω^* 内有连续偏导数，且，则建立了空间 $Orst$ 闭中区域 Ω^* 和空间 $Oxyz$ 中相应闭区域 Ω 的一一对应．与二重积分换元法类似，有换元公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*} f[x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t)]\mid J\mid \mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

其中 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}\neq 0.$

从式(2.1)，(2.2)可知：运用换元法求解重积分时，主要有两个步骤：

一是被积函数的变换．二重积分换元法时，被积函数由由 $f(x,y)$ 变换成 $f(x(r,s)y(r,s))\mid J\mid$；三重积分换元法时，被积分函数由 $f(x,y,z)$ 变换成 $f[x(r,s,t)y(r,s,t), z(r,s,t)]\mid J\mid$.

二是积分区域的转换．二重积分换元法时，积分区域由坐标平面 xoy 中的闭区域 D_{xy} 转换成坐标平面 uov 中的闭区域 D_{uv}；三重积分换元法时，积分区域由坐标空间 $Oxyz$ 中的闭区域 Ω 转换成坐标空间 $Orst$ 中的闭区域 Ω^*.

从以上步骤可知：被积函数的变换相对固定，而积分区域的转换相对灵活．下面给出积分区域转换的新方法，使得积分区域的转换也变的相对固定，学生学习起来更容易掌握.

收稿日期：2013 - 10 - 24

基金项目：湖南工学院 2013 年校级教研教改项目(JY201331)

作者简介：李国平(1979 -)，男，湖北石首人，讲师，硕士研究生，主要从事大学数学基础课教学研究。

3　积分区域的转换

3.1　平面上积分区域的转换

若 D_{xy} 为 x 型区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}\quad(3.1)$$

将其转换为 u 型区域

$$D_{uv}=\{(u,v)\mid a\leqslant x(u,v)\leqslant b,y_1(x(u,v))\leqslant y\leqslant y_2(x(u,v))\}=\{(u,v)\mid c\leqslant u\leqslant d,v_1(u)\leqslant v\leqslant v_2(u)\}\quad(3.2)$$

若 D_{xy} 为平面 xoy 上任意型区域,将其转换成平面 uov 上任意型区域的方法与(3.1)转换成(3.2)方法类似,至于把积分区域 D_{xy} 表示成何种形式后再转换成平面 uov 上何种区域形式由积分区域结构来决定. 下面给出两个例子.

例 3.1　求二重积分 $\iint_{D_{xy}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\}$.

解:令 $x=u\cos v,y=u\sin v$, 由二重积分换元法可得:

$$\iint_{D_{xy}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}}(u\cos v+u\sin v)\mid J\mid\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D_{uv}}u^2(\cos v+\sin v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

把 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\}$ 转换为平面 uov 中区域

$$D_{uv}=\{(u,v)\mid u^2\cos^2v+u^2\sin^2v\leqslant u\cos v+u\sin v\}=$$
$$\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant\cos v+\sin v\}=$$
$$\{(u,v)\mid \cos v+\sin v\geqslant 0,0\leqslant u\leqslant\cos v+\sin v\}=$$
$$\{(u,v)\mid \sqrt{2}\sin(v+\frac{\pi}{4})\geqslant 0,0\leqslant u\leqslant\cos v+\sin v\}=$$
$$\{(u,v)\mid 0\leqslant v+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi,0\leqslant u\leqslant\cos v+\sin v\}=$$
$$\{(u,v)\mid -\frac{\pi}{4}\leqslant v\leqslant\frac{3\pi}{4},0\leqslant u\leqslant\cos v+\sin v\}.$$

由定理 1.1 可得:

$$\iint_{D_{uv}}u^2(\cos v+\sin v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}v\int_0^{\cos v+\sin v}u^2(\cos v+\sin v)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\iint_{D_{xy}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

例 3.2　求二重积分 $\iint_{D_{xy}}\mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2-x\}$.

解:令 $y-x=u,y+x=v$, 则

$$x=\frac{v-u}{2},y=\frac{v+u}{2}.$$

由二重积分换元法可得:

$$\iint_{D_{xy}}\mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mid J\mid\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D_{uv}}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

把 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2-x\}$ 转换为平面 uov 中区域

$$D_{uv}=\{(u,v)\mid 0\leqslant\frac{v-u}{2}\leqslant 2,0\leqslant\frac{v+u}{2}\leqslant 2-\frac{v-u}{2}\}=$$
$$\{(u,v)\mid 0\leqslant v-u\leqslant 4,v+u\geqslant 0,v\leqslant 2\}=$$
$$\{(u,v)\mid 0\leqslant v\leqslant 2,-v\leqslant u\leqslant v\}.$$

由定理 1.1 可得:

$$\iint_{D_{uv}}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.$$

所以

$$\iint_{D_{xy}}\mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.$$

3.2　空间上积分区域的转换

若 Ω 为空间 $Oxyz$ 上闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_{xy},z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}\quad(3.3)$$

将其转换为空间 $Ouvw$ 型区域

$$\Omega^*=\{(u,v,w)\mid (u,v)\in D_{uv},w_1(u,v)\leqslant w\leqslant w_2(u,v)\}\quad(3.4)$$

其转换方法与平面上积分区域的转换类似. 下面给出两例子.

例 3.3　求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

解:积分区域可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$, 令

$$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z$$

则积分区域转换为

$$\Omega^*=\{(\rho,\theta,z)\mid \sqrt{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\leqslant z\leqslant 1\}=\{(\rho,\theta,z)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant 1,\rho\leqslant z\leqslant 1\}$$

由三重积分换元法及定理 1.2 可得:

$$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega^*}z\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\iint_{D_{\rho\theta}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\int_{\rho}^{1}z\rho^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{1}z\rho^2\mathrm{d}z$$

其中 $D_{\rho\theta}=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant 1\}$.

例 3.4　求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由旋转曲面 $x^2+y^2=2z$ 与两平面 $z=2,z=8$ 所围成的闭区域.

解:积分区域可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 2\leqslant z\leqslant 8,x^2+y^2\leqslant 2z\}$, 由定理 1.3 可得:

$$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^8\mathrm{d}z\iint_{D(z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D(z)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2z\}$, 再令

$$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$$

则积分区域 $D(z)$ 转换为

$$D^*(z)=\{(\rho,\theta)\mid (\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\leqslant 2z\}=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\sqrt{2z}\}$$

由二重积分换元法可得:

$$\int_2^8\mathrm{d}z\iint_{D(z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^8\mathrm{d}z\iint_{D^*(z)}[(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3d\rho=336\pi.$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=336\pi.$$

结论:从以上例子可看出:在运用换元法求解重积分时,本文给出的积分区域的转换方法使得积分求解变得更容易,学生学起来更易掌握.

参考文献:

[1] 高纯一,周　勇. 高等数学(下)[M]. 上海:复旦大学出版社,2009.

(责任校对　罗　渊)