卷积公式的妙用

胡杨利,李应求,赵晓芹
（长沙理工大学 数学与计算科学学院，湖南 长沙 410004）

摘　要:在处理二维连续型随机变量函数的分布时,卷积公式不仅可用于求两个独立随机变量和的概率密度函数,还可用于求两个独立随机变量线性和的概率密度函数。

关键词:卷积公式;独立;概率密度函数
中图分类号:G633.6　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1674－5884(2013)12－0185－02

概率论与数理统计是普通高校经济管理类和工科类专业的一门重要公共基础课.对这些非数学专业的学生来说,处理二维连续型随机变量函数的分布是一大难点,因为部分学生的二重积分不熟练,计算容易出错.很多教材在处理独立随机变量和的分布时,都介绍了卷积公式:借助一重积分,直接根据两个相互独立的随机变量的概率密度函数求出其和的概率密度函数,从而简化计算.

卷积公式 设 X、Y 是两个独立的连续型随机变量，概率密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则其和 $Z = X + Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

虽然卷积公式针对的是两个独立随机变量直接求和的情形,但它一样可以巧妙地用于计算两个独立随机变量线性和的概率密度函数.

例1　设二维连随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-x-2y}, x>0, y>0, \\ 0,\text{其它}, \end{cases}$$

令 $Z = X + 2Y$，求 $f_Z(z)$.

求解此题常用的方法是先求 Z 的分布函数,再求其概率密度函数,但在求 Z 的分布函数时,须利用二重积分计算.在此,我们尝试利用卷积公式解此题.

解法一　经过计算，$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$，$f_Y(y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2y}, y>0 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$.

显然,对任意的 x,y，$f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$，即 X、Y 独立.由卷积公式(2)，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-2y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

因为 $f_X(z-2y)f_Y(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0, z-2y > 0 \Leftrightarrow 0 < y < z/2$，所以 $z > 0$ 时，

$$f_Z(z) = \int_0^{z/2} \mathrm{e}^{-(z-2y)} \cdot 2\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y = \int_0^{z/2} 2\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}y = z\mathrm{e}^{-z},$$

即　$$f_Z(z) = \begin{cases} z\mathrm{e}^{-z}, z>0, \\ 0, z \leqslant 0. \end{cases}$$

在此解法中，X、Y 独立,虽然不是求 $X+Y$ 的分布,而要求 $X+2Y$ 的分布,用 y 表示 Y 的取值,将 $2Y$ 看作一个整体,根据 $Z = X + 2Y$，直接用 $z-2y$ 来表示 X 的取值,从而套用卷积公式(2)一样得到了以上正确答案.

以下介绍两个定理,分别见文献[1],P138,引理3.1和文献[2],P118,定理2.6.1.

定理1　设随机变量 X、Y 相互独立,若 $g(x)$、$h(x)$ 是两个连续或逐段连续的函数,则 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 相互独立.

定理2　设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，$y = g(x)$ 严格单调,且反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续的导数,那么 $Y =$

收稿日期:2013－08－30
基金项目:湖南省普通高校教学改革研究项目(湘教通〔2011〕315号);大学生创新性实验项目“浅析贝叶斯方法在生活中的应用”阶段性成果
作者简介:胡杨利(1976－),女,湖北松滋人,副教授,博士,主要从事随机环境中分枝过程研究。

$g(X)$ 为连续型随机变量,且

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'|, \alpha < y < \beta,$$

其中, $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty)), \beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$.

解法二 由于 X、Y 独立,由定理 1, X 与 $2Y$ 独立. 设 $\omega = g(y) = 2y$, 显然 $\omega = g(y)$ 满足定理 2 的条件,且 $g^{-1}(y) = \omega/2, (g^{-1}(y))' = 1/2$, 所以

$$f_{g(Y)}(\omega) = f_{2Y}(\omega) = f_Y(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1}(y))'| = \begin{cases} e^{-\omega}, \omega > 0 \\ 0, \omega \leqslant 0 \end{cases}.$$

由卷积公式(1)(或(2)),

$$f_Z(z) = f_{X+2Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_{2Y}(z-x)\,dx,$$

因为 $f_X(x) \cdot f_{2Y}(z-x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, z-x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < z$, 所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z e^{-x} \cdot e^{-(z-x)}\,dx = ze^{-z}, z > 0 \\ 0, z \leqslant 0 \end{cases}.$$

综上所述,当 X、Y 独立时,若求 $Z = X + aY(a \neq 0)$ 的分布,运用卷积公式(2),用 y 表示 Y 的取值,将 aY 看作一个整体,用 $z - ay$ 来表示 X 的取值;若求 $Z = aX + Y(a \neq 0)$,则运用卷积公式(1), 用 x 表示 X 的取值,将 aX 看作一个整体,用 $z - ax$ 来表示 Y 的取值.

当 X、Y 独立时,若求 $Z = aX + bY(ab \neq 0)$ 的分布,则须先求 aX 或 bY 的分布,再利用卷积公式.

例 2 X、Y 独立,均服从参数为 1 的指数分布,若 $Z = 2X - 3Y$, 求 $f_Z(z)$.

解法一 令 $W = 2X$, 由定理 1, W 与 Y 独立;而由定理 2, W 的概率密度函数为

$$f_W(\omega) = f_X(\omega/2) \cdot |(\omega/2)'| = \begin{cases} 1/2e^{-\omega/2}, \omega > 0 \\ 0, \omega \leqslant 0 \end{cases}.$$

此时, $Z = W - 3Y$. 由卷积公式(2),

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_W(z+3y) f_Y(y)\,dy.$$

因为 $f_W(z+3y)f_Y(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0, z+3y > 0 \Leftrightarrow y > 0, y > -z/3$, 所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-z/3}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{z+3y}{2}} \cdot e^{-y}\,dy = \frac{1}{5}e^{\frac{z}{3}}, z \leqslant 0 \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{z+3y}{2}} \cdot e^{-y}\,dy = \frac{1}{5}e^{-\frac{z}{2}}, z > 0 \end{cases}.$$

解法二 令 $W = -3Y$, 由定理 1, W 与 X 独立;而由定理 2, W 的概率密度函数为

$$f_W(\omega) = f_Y(-\omega/3) \cdot |(-\omega/3)'| = \begin{cases} 1/3e^{-\omega/3}, \omega < 0 \\ 0, \omega \geqslant 0 \end{cases}.$$

此时, $Z = 2X + W$. 由卷积公式(1),

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_W(z-2x)\,dx.$$

因为 $f_X(x)f_W(z-2x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, z-2x < 0 \Leftrightarrow x > 0, x > z/2$, 所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{3}e^{-\frac{z-2x}{3}}\,dx = \frac{1}{5}e^{\frac{z}{3}}, z \leqslant 0 \\ \int_{z/2}^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{3}e^{-\frac{z-2x}{3}}\,dx = \frac{1}{5}e^{-\frac{z}{2}}, z > 0 \end{cases}.$$

参考文献:

[1] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程[M]. 北京:高等教育出版社,1983.

[2] 茆诗松,程依明,濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[3] 谢永钦,梁小林. 概率论与数理统计[M]. 上海:复旦大学出版社,2010.

[4] 李贤平. 概率论基础(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,1997.

(责任编校 谢宜辰)