

利用类比法培养大学生的创造能力研究

袁梓瀚,李世群,唐果

(湖南科技大学 数学学院,湖南 湘潭 411201)

摘要:培养学生的数学创造能力具有极其重要的意义,我们讨论用类比法在引导学生发现新概念、新定理、解决和推广新习题中培养学生的创造能力;教会学生类比的途径,打开学生的创造视野。

关键词:类比;创造;培养

中图分类号:G642 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-5884(2013)12-0108-03

研究新事物时联想同它相似的已知事物,并根据新事物同已知事物之间部分属性的相似进而推得其它属性也相似,这样发现新规律的方法称为类比法。可见类比得到结论的正确性具有或然性:正确,不正确,或者部分正确。类比法为认识活动提供了联想性的、发散性的、横向性的及具创造性的思维活动,它用相似性作为操作向导,以联想作为思考的前提,以建立猜想、法则、公式、定理和性质为使命。古今中外很多学者从各自的角度阐明了对类比法的看法,如康德认为当理智缺乏可靠的思维时,类比往往能指引我们前进;波利亚认为类比可能在最终导致重大的科学发现,是发现的伟大途径之一。

在有严谨且系统的理论体系的大学数学教学中,教材的主要内容是讲解概念、推证定理、公式。因此大多数教师采用逻辑论证的方法来讲授知识,这就使得教学中主要培养的是学生的逻辑思维能力,然而教学中更为重要的是培养学生的创造能力。采用类比法来培养学生的创造能力便利、简洁、易于操作,同时也化解了学生接受新知识的难度。因此充分发掘可以采用类比法进行教学的教学内容,及科学地采用类比法进行教学,对学生轻松地掌握知识,同时提高学生的创造能力有着极其重要的意义。

一 充分运用教学内容,培养学生的创造能力

1. 用类比法提出新概念,培养学生的创造兴趣和根据已知概念建立新概念的能力

我国大学生解决问题的能力很强,但发现问题的能力

不足。而从创造的角度来看,发现问题比解决问题更为重要,因为只有当有了问题,才能促使人们去创造,否则创造就成了空中楼阁。所以提高学生发现问题的能力是教师的神圣使命与职责。教师在讲解数学概念时引导学生从相类似知识中发现新的概念,相对于其它发现要简单、明了,这不仅可以提高学生发现问题的能力,而且能极大地增强学生创造的兴趣和信心。例如,老师在讲解一元函数的极限概念时,可引导学生通过类比发现还存在二元(多元)函数的极限概念,这既可以引起学生的好奇心和增强学生发现问题的信心,又为今后相关的学习做了铺垫。老师在教二元(多元)函数极限概念时,在复习一元函数极限概念的基础上,启发学生尝试着阐述二元(多元)函数的极限概念,可实现两个方面的目标:一是减轻学生的负担和降低知识的难度;二是完成知识上的创造。同理,在讲解一元(二元、多元)函数连续、导数、微分、积分概念时可进行类似的操作。这种通过类比方式来进行的简单创造是学生力所能及的,能快速地引导学生进入创造的角色,又能提高他们的创造能力,从而极大地提高学生的创造信心与兴趣。

2. 用类比法提出新的定理,培养学生创立新定理的能力

高斯认为发现一个定理比证明一个定理更为重要。因为定理等一旦被发现,之后的证明往往是时间的早晚问题。高等数学中有许多定理可以通过相互类比来教学。教师引导学生通过类比,建立新定理,发现它的证明思路,

收稿日期:2013-09-18
基金项目:湘教改项目“数学课堂教学改革与创新型人才培养的研究与实践”2011-214;湘教改项目“基于学生数学现实的大学课堂教学改革与实践”(2012-249);2011年湘教改项目“大学数学方法教学改革的研究与实践”
作者简介:袁梓瀚(1967-),男,湖南溆浦人,博士,副教授,主要从事数学课程与教学论研究。

最终做出较为严谨的推理论证。例如把一元函数定积分的定理、性质类比到二重积分的相关定理和性质;把广义积分(无穷限)的相关定理、性质类比到级数的相关定理、性质等。

3. 利用类比法解新习题,培养学生创造性解决问题的能力

习题教学中,引导学生尝试用类比法去发现解题的方法,往往会得到意想不到的效果。当我们审题后,首先从条件类似、结论类似或者结构形式类似等方面,充分联想同它类似的习题或者定理,从中有望得到启发,发现该习题的解决方法,然后对习题的条件或者结论进行改造,创造出新的习题。例如,设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导,且 $f(a)=0$,证明至少 $\exists \xi \in (0,a)$ 有 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。通过联想发现这个习题的条件同洛尔定理的条件有些相似,因此须想办法构造一个满足洛尔定理条件的新函数,立刻可以构造新函数 $g(x) = xf(x)$ 即可证明结论。继续类比,构造新函数 $g(x) = x^n f(x)$,联想拉格朗日中值定理,放宽习题的条件为函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导,可以证明至少 $\exists \xi \in (0,a)$ 有 $n\xi^{n-1}f(\xi) + \xi^n f'(\xi) = a^{n-1}f(a)$,当 $n=1$ 时有 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = f(a)$,这样就得到了一个更好的结论。因此通过这种方法既容易让学生解决问题,又能创造出新的习题,对培养学生的创造性解决问题的能力有极大作用。

二 教会学生类比的途径,打开学生的创造视野

1. 低维类比高维,实现从低维到高维的创造

低维空间知识相对简单,易于为学生所理解。以循序渐进的学习方式从低维空间过度到高维空间,符合学生的认知特点及规律。由于高维空间里许多数学定理对应着低维空间里类似的定理,因此,在教学中高维空间的性质与定理可通过对低维空间里相关性质与定理的类比来建立,完成从低维空间到高维空间的发现与创造。例如,空间(三维)中点到平面的距离公式可类比平面(二维)中点到直线的距离公式来得到,实现从二维到三维的发现与创造。再如,二元(多元)微分与积分中的相关命题可类比一元微分与积分的相关命题来获得。通过从低维向高维的类比可以打开学生的思路,创造性地获得新定理。

2. 有限类比无限,实现从有限到无限的创造

从有限扩展到无限在微积分的发展中不断地得以实现,许多新的定理都是通过有限同无限类比来获得的,当然有些定理需要适当修改或增减条件。例如,对于有限项求和,绝对值的和不少于和的绝对值,即 $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ 。由于定积分本质上也是求和,通过类比推理得到 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$;再如,对于实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$,成立不等式;同样无穷级数与积分在许多方

面(它们的极限)同有限和可作类比,通过类比可得到柯西不等式 $(\int_a^b f(x)g(x) dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$ 。所以教学生从有限类比到无限既有助于找到创造的途径,也有利于创造的实现。

3. 特殊类比一般,实现从特殊到一般的创造

研究复杂定理时,先从一个特殊情况入手,解决了这个特殊情况后,再分析解决特殊情况时所用到的方法和所得的结果,把它们与一般情况相类比,看一般情况能不能照此解决。例如,证明对于凸形的域 E 内有有界偏导函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$ 于域 E 内一致连续。我们在 E 内取两点 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$,首先考虑以 $|P_1P_2|$ 为直径的圆(包括圆周上的点)的凸形域,在这个特殊的凸形域上证明一致连续,然后把它的解决方法类比到一般性的凸形域上。具体方法见文献[2]。再如,用一条线做成的一个线圈放置在平面上,它的周长为 $2l$,再做一个圆形纸片,它的直径为 l 。求证:不管线圈做成什么样的闭曲线,它都可以被圆形纸片完全覆盖。由于线圈可以是任意形状的曲线,那我们先考虑特殊的情况,先假设线圈是圆,则它的半径 $r = \frac{l}{\pi} \leq \frac{l}{2}$,显然这时只要把线圈的圆心与圆形纸片的圆心重合,线圈就可以被圆形纸片完全覆盖。我们不妨类比到一般的情况,设想这条闭曲线是由圆扭曲而得到的,圆的一条直径 AC 扭曲成了 $A'C'$, AC 的中点 O 变成了 $A'C'$ 的中点 O' , AC 分圆成长度相等的两个半圆, $A'C'$ 也把闭曲线分成两条等长的弧,我们希望 O' 点也有类似于圆心 O 的作用。事实上,如果把圆形纸片的中心重合 O' ,设 D' 为线圈上的任一点,要证明 $O'D' \leq \frac{l}{2}$ 。设 E' 为 $A'D'$ 的中点 $O'D' \leq O'E' + D'E' \leq \frac{1}{2}(C'D' + A'D') \leq \frac{1}{2}(C'D' \text{曲线} + A'D' \text{曲线}) = \frac{l}{2}$ 。从上可以看出,特殊情况的解决方法对于打开创造思路有其独特的作用。

4. 熟悉类比生疏,完成在生疏问题上的创造

对于暂时不知道如何求解的问题,但发现条件、结论、图形、形式、数据等的某些部分与我们熟悉的另一问题相类似,那么可以通过类比,看看是不是可以把解决熟悉问题的方法借鉴过来,对其中出现的差异逐步地化解,并最终找到解决问题的方法。例如,设 $P(x)$ 是一个 n 次多项式,且对 $k=0,1,2,\dots,n$,有 $f(k) = \frac{k}{k+1}$,试求 $P(n+1)$ 的值。

我们知道, $P(x)$ 在 $x=a$ 的值 $P(a)$ 恰好是用 $x-a$ 去除 $P(x)$ 的余数。假如有一个 $n+1$ 次多项式 $Q(x)$ 在 $x=0,1,2,\dots,n$ 的值都是3,则必 $Q(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n) + 3(a \neq 0 \text{的常数})$,把已知条件与 $Q(x)$ 比较,可以引进辅助函数

$$f(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n) + \frac{x}{x+1} \quad (1)$$

显然, $f(x)$ 恒有 $P(k) = \frac{k}{k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$ 。但 $f(x)$ 不是 n 次多项式, 连多项式都不是。能不能设法对 $f(x)$ 进行调整, 使满足题设的要求呢? (1) 式中的常数 a 可以任意选择, 我们要在 a 身上打主意, (1) 中的右边第一项为 $n+1$ 次, 应再降低一次, 我们引进另一辅助函数 $g(x)$

$$= \frac{ax(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{x+1} + \frac{x}{x+1},$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1} [ax(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n) + x] \quad (2)$$

$g(x)$ 仍满足 $g(k) = \frac{k}{k+1}$, 且方括号内为 $n+1$ 次多项式, 如能调整系数 a , 使方括号内恰有一个因子 $1+x$, 则 $g(x)$ 即可取作 $P(x)$ 了, 令括号内多项式为

$$T(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n) + x \quad (3)$$

要 $T(x)$ 有因子 $1+x$, 只要 $T(-1) = 0$, 即 $a(-1)(-2)(-3)\cdots(-n-1) - 1 = 0$, 从而 $a = (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$

代入(2), 则可取则 $g(x)$ 为 $P(x)$ 了, 即从而可求得: 当 n 为偶数时 $P(n+1) = \frac{n}{n+2}$; 当 n 为奇数时 $P(n+1) = 1$ 。

由上可知, 如何由熟悉过度生疏, 是创造及解决问题的关键。

创造能力的培养是中国教育的短板。研究表明, 教师用类比法培养学生的创造能力, 学生容易进入角色, 也易于打开创造的视野, 学生的创造意识及创造能力在教学中能有效得到提高。而类比法有时也很危险, 类比的结果可能不正确, 教师在教学过程中需引导学生在正确与错误中进行甄别、选择、修正及完善, 这正是类比法的魅力所在。

参考文献:

[1] 惠志昊, 李建民. 类比法在高等数学解题教学中的应用[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2010, 26(6): 24-26.

[2] 费定晖, 周学圣. 吉米多维奇数学分析习题解(五)[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1983.

[3] 范秋君. 《数学分析》教学中的类比[J]. 数学教育学报, 1993, 2(1): 81-84.

[4] 侍平. 高等数学教学中的类比[J]. 山东教育学院学报, 2002(6): 93-94.

[5] 马兵. 数学竞赛解题策略[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2008(5).

(责任编辑 莫秀珍)