第5卷 第12期
2013年12月
当代教育理论与实践
Theory and Practice of Contemporary Education
Vol. 5 No. 12
Dec. 2013

“最近发展区”理论在例题设计中的应用

——以“均值不等式求最值”为例

沈　旭[1]，贠朝栋[2]，曾友良[2]
（1. 湘钢第一中学，湖南 湘潭 411100；2. 湖南科技大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要：教师在例题设计中，应先了解学生的现有发展水平，再根据知识的难易程度及重要性合理地创设问题情境，然后着眼于他们的“最近发展区”，有效地设置问题“障碍”，巧妙地诱导学生尝试并解决眼前的障碍。均值不等式求最值的例题设计方法是将知识点分为几个层次，建立“最近发展区”，使学生熟练的掌握并运用均值不等式。

关键词：最近发展区；均值不等式；最值
中图分类号：G633.6　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1674－5884(2013)12－0014－03

一般来说，教师为使学生更熟练的掌握某个知识点时，主要通过引导学生复习回顾已学习的内容，然后通过相对困难的例题及习题的讲解和练习使学生得以提高。如何选择这些题目以及如何利用这些题目便成为教学过程成败的关键。本文就以均值不等式运用的例题设计为例来说明如何设计例题。

一　“最近发展区”理论概述

前苏联心理学家维果茨基认为：“学生有两级发展水平，第一级是‘现有发展水平’，是指学生独立活动时所能达到的解决问题的水平；第二级是‘潜在的发展水平’，是指学生在经过教师或其他人的帮助或诱导下经努力能够达到的发展水平，两者之间的差异就是‘最近发展区’”。该理论的提出，很好的论述了教师教学与学生发展之间的关系，如维果茨基指出：教学应该走在发展的前面．同时，在教学过程中，教师应根据学生认知水平的不同设置不同的知识“障碍”，让他们在解决问题的过程中成长，构建自身的认知结构。

当然，随着学生年龄的增长和认知结构的改变，他们的“最近发展区”也会发生变化（如图1所示）；也就是说，“最近发展区”是一个动态的概念。这就要求老师在知识讲解的过程中，不能拘泥于同一种层次的教学，而应着眼于学生的现有和潜在发展水平，根据学生的不同而采取不同的教学方法，使学生的个性发展更显有效性。

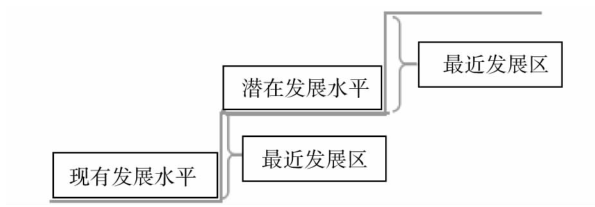

图1

二　基于“最近发展区”理论的例题设计分析

例题教学在中学数学教学中有着十分重要的作用，如诠释解题思想，展现数学的美，以及解决生活中一些常见的数学问题等，现阶段虽说国家实行新课程改革，并且提倡在课堂上运用新的教学思想和教学方法。但由于传统教学思想的影响、教师素养的层次不齐以及教学设备等硬件设施的限制，致使我国大部分地方的教学仍然以“讲解－传授”的教学模式为主，这种教学模式可以使同学们系统的掌握所学数学知识，并形成良好的认知结构，但由于其教学环节有老师主导，极大的限制了学生主观能动性和思维创造性的健康发展，而这些不利于学生能力的发展。

为了使同学们更好的理解和掌握例题及解题方法，根

收稿日期：2013－09－12
基金项目：2012湖南科技大学研究与教改项目“基础教育课程改革背景下的教师培养与培训研究”
作者简介：沈　旭(1972－)，男，湖南湘乡人，中学一级，主要从事高中数学教学研究。

据维果茨基的“最近发展区”理论,在围绕一个知识系统或某个知识点设计例题时,例题之间的知识结构应具有一定的“层次性”并且与学生的思维发展水平相一致,因为如果“层次感”跨度太大或者说所包含知识点过多,就失去了“最近”的涵义;而层次感跨度太小,便不能更好的启迪学生去思考,这便失去了“发展”的涵义。所以教师在例题设计中,应先了解学生认知结构的“现有发展水平”,再根据知识的难易程度及重要性合理地创设问题情境,然后着眼于他们的“最近发展区”,有效地设置问题“障碍”,巧妙的诱导学生尝试并解决眼前的障碍。学生通过对“困难”问题的解决,可以更精确的理解、掌握并运用所学知识内容,同时可增强学生的自信心以及主动解决问题的能力。在此基础上,进行下一个知识点的讲解和设置具体的思维发展过程。

三 “均值不等式求最值”的例题设计探讨

函数求最值问题是均值不等式运用过程中十分典型的问题,并且均值不等式的运用十分广泛,特别是其推论:(1)如果 $a,b \in R^{+}$, 那么 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a=b$ 时“=”成立;(2)如果 $a,b,c \in \mathbf{R}^{+}$, 那么 $\sqrt{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$, 当且仅当 $a=b=c$ 时“=”成立。而往往在运用该推论解决问题的时候,学生会忽略了结论“一正”“二定”“三相等”条件中的某一个,究其原因,还是学生对这些条件的理解不够透彻。在通过例题讲解均值不等式求最值的运用时,可以更好的利用“最近发展区”理论指导教学。在此,笔者通过具体的实例讲解例题设计的过程。

例 1 求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$ 上的值域;

例题设计分析:本题是同学们在中学数学中经常碰到的“对号函数”(即 $f(x)=x+\frac{a}{x}, a>o$)的特例,在老师讲解完均值不等式的应用条件之后,学生学会了求 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x \in R^{+}$ 上的最值问题,并且很容易得出其最小值为 2。受这种解法的影响,在解决题目例 1 时,忽略了函数定义域的变化,即 $x \in R$ 且 $x \neq 0$ 与 $x \in R^{+}$ 的范围不同,而且盲目的利用原来的解法,得出结果为:函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$ 上的值域为 $[2,+\infty)$。

为此,老师需要分析同学们出现错误的原因,根据他们的发展水平分层次设计讲解,因为学生的现有发展水平是求当 $x>0$ 条件下函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的最小值,而学生的潜在发展水平是学会求当 $x<0$ 时 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的最大值问题。即设定的“最近发展区”为 $x>0$ 时函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的最小值求解到 $x<0$ 时函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的最大值求解的过渡。通过同学们交流和探讨,得出以下解题过程:

(1)当 $x>0$ 时, $y=x+\frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2$, 当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ 即 $x=1$ 时取等号;

(2)当 $x<0$ 时,可以得出 $-x>0$,

所以 $-y=(-x)+\frac{1}{(-x)} \geqslant 2\sqrt{(-x)(\frac{1}{-x})}=2$, 从而得出 $y \leqslant -2$;

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ 即 $x=-1$ 时“=”成立;

综上可得,函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的值域 $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$。

这道例题的讲解,使得同学们掌握了应用均值不等式过程中“一正”条件的判定,在此基础上,老师需要重新设置问题障碍,创建新的最近发展区,实现“二定”条件的讲解,以充分挖掘同学们解决问题的潜能。从而可以举出下面的例子:

例 2 求 $y=x^{2}+4x+7+\frac{1}{x^{2}+4x+7}$ 的最小值;

例题设计分析:通过例 1 的讲解,学生掌握了形如 $y=\mu+\frac{1}{\mu}$ 的函数最值解法,并且判断得出 $x^{2}+4x+7=(x+2)^{2}+3>0$, 即满足均值不等式所要求的“一正”的条件,故得出 $y=x^{2}+4x+7+\frac{1}{x^{2}+4x+7} \geqslant 2$, 即函数最小值为 2.

这是中学数学解题中学生常犯的错误,就是对条件的考虑不全,也就是说同学们的现有发展水平是掌握了均值不等式的运用过程中“一正”条件的判定,而潜在的发展水平是同学们对均值不等式中“二定”条件的理解,正如判断本题 $x^{2}+4x+7=\frac{1}{x^{2}+4x+7}$ 时 x 的值是否存在一样。通过分析和讨论,同学们得出正确的解题过程:

令 $\mu=x^{2}+4x+7$, 则 $\mu \in [3,+\infty)$,所以,函数可变形为: $[3,+\infty)$

由前面所学函数的单调性可知, $y=\mu+\frac{1}{\mu}$ 在 $\mu \in [3,+\infty)$ 单调递增.

所以 $y=\mu+\frac{1}{\mu} \geqslant 3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$, 即 $y=x^{2}+4x+7+\frac{1}{x^{2}+4x+7}$ 的最小值为 $\frac{10}{3}$.

经过两道较相似题目的解决,学生已有了一些应用均值不等式求最值问题的思路和方法。但问题是因为以上例题有极高的相似性,只给出这类例题可能会使学生想当

然地认为均值不等式只限于形如 $f(\mu) = \mu + \frac{1}{\mu}$ 的最值问题中. 这样可能造成学生对均值不等式的理解以及其运用范围的认识相对狭隘. 同时，当学生面对其他形式的最值问题时，会疑虑到底能不能用均值不等式这一工具.

由此，教师在设计题目时就应当给出一些形式有变且有些“转弯”的题目，使学生跳出现有发展水平，达到更高的认知水平，当然不能超出教学大纲的要求。

例 3　求函数 $y = x + \frac{4}{x^2}$ 在 $x > 0$ 上的最小值。

例题设计分析：这个题目形式上与例 1 和例 2 有点像又不太像，若直接用上例的方法求解，并不能得出正确的答案。问题该怎么解决？学生能否将其转换为他们所熟悉的问题？带着这些疑问，老师可以指导学生先判断题目是否满足“一正”的条件；这个很容易解决，因为题目已经要求 $x > 0$；然后再利用合理的方法——裂项法，验证是否满足“二定”的条件，即 $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{x^2} = 1$ 情况下方程 $\frac{1}{2}x = \frac{4}{x^2}$ 是否为定值，从而可以使问题得到解决。并且学生的思维发展也实现了“积为定值”从两项 $ab = k$（k 为常数）到 $abc = k$（k 为常数）的转变。通过分析，得出解题过程为：

由于 $x > 0$，所以 $y = x + \frac{4}{x^2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{x^2}} = 3$

当且仅当 $\frac{1}{2}x = \frac{4}{x^2}$ 即 $x = 2$ 时“$=$”成立。

从而得出函数 $y = x + \frac{4}{x^2}$ 在 $x > 0$ 上的最小值为 3。

通过对例 3 的思考与解决，学生已经能感受到均值不等式在求最值应用中的灵活性，但我们期望学生能够进一步打开思路。某些看似简单且用不上均值不等式的问题，实际上可通过均值不等式得到极佳的解决。

例 4、求函数 $y = x(4 - 3x)$ 的最大值，其中 $x \in (0, \frac{4}{3})$.

例题设计分析：这个问题主要考察了“和为定值”情况下均值不等式的运用。通过例 1、例 2 和例 3，同学们的现有思维水平是学会了“积为定值”情况下运用均值不等式求解函数最值问题，而潜在的思维发展水平就是在“和为定值”条件下均值不等式求解函数最值的应用。在学生解决问题时发现可以用二次函数的性质求解其最大值；而在老师的引导下，学生觉得当 $x \in (0, \frac{4}{3})$ 时，因为 $x > 0, 4 - 3x > 0$，故其可以用均值不等式求解最大值。通过他们集体讨论，可以得出完整的解题方案：

解：$\because 0 < x < \frac{4}{3}, \therefore 0 < 4 - 3x < 4$

从而可得：$3x(4 - 3x) \leqslant (\frac{3x + 4 - 3x}{2})^2 = 4$，当且仅当 $3x = 4 - 3x$ 即 $x = \frac{2}{3}$ 时“$=$”成立。

$\therefore f(x) = x(4 - 3x) = \frac{1}{3} \cdot [3x \cdot (4 - 3x)] \leqslant \frac{4}{3}$，当且仅当 $x = \frac{2}{3}$ 时“$=$”成立。

将“最近发展区”理论运用与课堂教学中，可以达到很好的教学效果，然而，这更需要老师与学生加强沟通，了解每一位学生的学习兴趣及他们的现有发展水平，然后，再根据具体的实际情况合理设置问题“障碍”，使教学更多的面向全体学生，从而提高课堂教学效率。

参考文献：

[1] 刘锡宝. 高中数学教材基础知识全解[M]. 郑州：龙门书局，2012.

[2] 维果茨基. 维果茨基教育论著选[M]. 余震球译. 北京：人民教育出版社，2005.

[3] 张锡洲. 例题教学在数学教学中的作用及其设计[J]. 广西师范学院学报，2004(3).

[4] 康　国. 浅谈“用均值不等式求最值”的教学[J]. 青岛教育学院学报，1999(1).

（责任编校　王小飞）