

代数“图化”教学法：一种值得重视的 数学教学方法

王志勇

(湘潭市第一中学,湖南 湘潭 411100)

摘 要:数形结合的思想始终是中学数学教学的重要数学思想。代数问题的“图化”是这种思想的重要体现。重视代数“图化”教学,有利于培养与训练学生创造性思维能力,有利于提高学生分析与解决问题的能力,有利于促进学生数学学习的积极性和自信心。

关键词:代数问题;图化;教学方法

中图分类号:G633.62 **文献标识码:**A **文章编号:**1674-5884(2013)12-0012-02

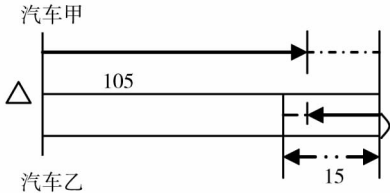
数学是研究空间形式与数量关系的一门科学。数和形在一定条件下可相互转化,实现这种转化,既有利于探究问题的本质又有利于对问题的求解,同时也是新课改理念的基本要求。现行的中学数学教材对运用代数方法来研究几何图形和对如何利用几何图形来帮助解决代数问题有许多的介绍与探讨。根据多年数学教学实践与反思,就如何利用图形来帮助解决代数问题(简称“图化”)进行了有益的尝试和探索。

一 数学应用题的“图化”

数学应用题,往往是文字描述较多,学生要有一定的数学分析能力和一定的阅读理解能力才能有效地实施解答。对一些关键是寻求等量关系的应用题,如能把文字叙述“图化”,使等量关系更加直观,会有利于问题的解决。

例 1:汽车甲、乙先后从某地出发前往 A 地,在距 A 地 105 公里处,乙赶上甲,在这以后经过 $\frac{7}{5}$ 小时,汽车甲和到达 A 地后立即返回的汽车乙迎面相遇,当汽车甲到达 A 地时,乙已离开 A 地 15 公里。求两车的速度。

解:(如图)设甲、乙两车的速度分别为 x 、 y 公里/小时。



则两车在 $\frac{7}{5}$ 小时内共行 $\frac{7}{5}(x+y)$ 公里,而两车继续行进后,甲走完 105 公里,乙走了 120 公里。此时,两车费时是相同的,帮得方程组:

$$\begin{cases} \frac{7}{5}(x+y) = 2 \times 105 \\ \frac{105}{x} = \frac{120}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 150 \\ 7y = 8x \end{cases}$$

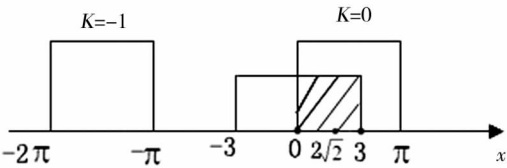
解之得: $x = 70, y = 80$

答:甲、乙两车的速度分别为 70 和 80 公里/小时。

二 代数式的“图化”

各类函数式与代数式及与之有关的数学问题是中学数学教学最为常见,数量较多的一类问题,其中有许多问题所表现的数量关系可汇聚在某一特定的几何图形中。这时,构造一相关的图形,而从图形中获取信息,寻求解答。

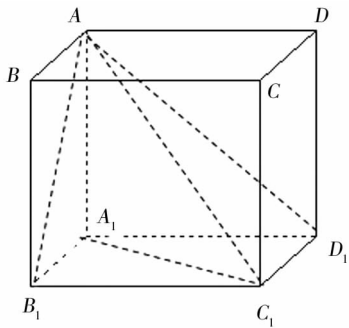
例 2:求函数 $y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\lg(9-x^2)}$ 的定义域



解:由不等式组

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 9 - x^2 \neq 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -3 < x < 3 \end{cases}$$

显然,所求定义域即为上式三个不等式解集之交集。
如图可见: $x \in [0, 3)$ 且 $x \neq 2\sqrt{2}$ 为所求定义域。



例3: 已知 a, b, c 均大于零且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 。

求证: $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-c^2} + a + b + c > 3$
解: $\because a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$\therefore$ 证式转为 $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} + a + b + c > 3$

据此证式及条件的特征,可作对角线长为1的长方体 AC_1 (如图),其中 $AA_1 = a, A_1B_1 = b, A_1D_1 = c$ 。故: $AB_1 = \sqrt{a^2+b^2}, AD_1 = \sqrt{a^2+c^2}, A_1C_1 = \sqrt{b^2+c^2}$, 于是在 $\triangle AB_1C_1$ 中, $\because AB_1 + B_1C_1 > AC_1, \therefore \sqrt{a^2+b^2} + c > 1$, 同理得 $\sqrt{a^2+c^2} + b > 1, \sqrt{b^2+c^2} + a > 1$, 以上三式相加即获所证结论。

三 方程与不等式的“图化”

解方程与解不等式是中学数学“重头戏”,充分注意相关函数的图象及它们之间的关系,可出其不意地获得一些问题的妙解。

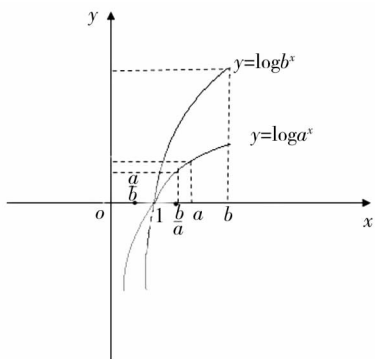
例4: 已知 $a^2 > b > a > 1$, 试将下列各数按由大到小的顺序排列起来, $\log b \frac{b}{a}, \log a \frac{a}{b}, \log a^b, \log b^a$ 。

解: 由 $a^2 > b > a > 1$ 可得:

$$0 < \frac{a}{b} < 1, \frac{b}{a} > 1, a > \frac{b}{a}$$

于是在同一坐标系中,画出函数

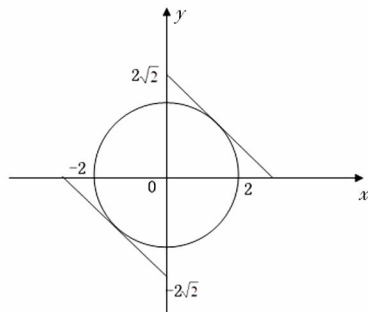
$y = \log a^x$ 与 $\log b^x$ 的图象。(如图)



$$\text{不难得 } \log a^b > \log b^a > \log b \frac{b}{a} > \log a \frac{a}{b}$$

例5: 已知 $x, y \in \mathbf{R}$ 且 $x^2 + y^2 = 4, x + y$ 的最值。

解: 设 $x + y = b$, 则 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $x + y = b$ 分别视为直角坐标平面上的圆和直线 (如图)。



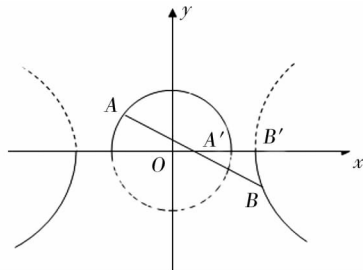
显然 b 的最值即直线 $x + y = b$ 在 y 轴上截距的最值。

$$\text{故 } (x + y)_{\max} = 2\sqrt{2}, \quad (x + y)_{\min} = -2\sqrt{2}$$

四 函数解析式的“图化”

有些函数解析式若置于直角坐标系中来考虑。常常会出现一些出人意料的几何现象,抓住这些现象就像抓住了“狐狸”的尾巴,使问题获得解答。

例6: 试求函数 $f(a \cdot b) = (a - b)^2 + (\sqrt{3 - a^2} + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4})^2$ 的极小值。

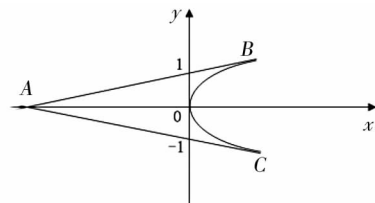


解: 观察已知函数发现 $f(a \cdot b)$ 是两动点 $A(a, \sqrt{3 - a^2})$, $B(b, -\frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4})$ 的距离的平方, 则 $|AB|$ 的最小值为所求。又知 A 点在半圆 $x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 上, B 点在曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 (y \leq 0)$ 上。观察可知 $|AB|$ 的最小值为 $|A'B'| = 2 - \sqrt{3}$ 。即 $f(a \cdot b)$ 的最小值获求 $f(a \cdot b)_{\min} = 7 - 4\sqrt{3}$ 。

例7: 求 $y = \frac{\sin x}{4\sin^2 x + 9}$ 的值域 $x \in [0, 2\pi]$

解: 视 y 为过点 $A(-9, 0)$ 和 $P(4\sin^2 x, \sin x)$ 两点直线的斜率且 P 在 $x = 4y^2$ 且 $|y| \leq 1, 0 \leq x \leq 4$ 上。

(如图) 显然有 $K_{AC} \leq y \leq K_{AB}$, 不难得: $-\frac{1}{13} \leq y \leq \frac{1}{13}$



(责任编辑 王小飞)