线性代数的掌握与教学(Ⅰ)

——以克莱姆法则教学为例

陈建华

(扬州大学 数学科学学院,江苏 扬州 225002)

摘　要:以克莱姆法则为研究载体,通过教师对克莱姆法则的不同教学处理,考察教师对数学知识的理解,探讨教师数学内容知识的掌握对教学的影响,通过莱姆法则的知识包,进一步分析教师的知识结构对数学教学的影响。

关键词:数学理解;知识包;克莱姆法则

中图分类号:G642　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1674－5884(2013)11－0134－04

一　缘起

2006 年 4 月 2 日起,孟岩在微博上连续发表了题为《理解矩阵》的博文,介绍学习线性代数课程的体会,引起大家的热烈讨论:(网友 cqsjnhustccrdi)到后来学结构动力学的时候才知道原来矩阵是这么用的,但是基础都已经忘光了。原因是在学矩阵的时候是鹦鹉学舌,根本没有理解其本质代表了什么。(网友 peimichae)很多老师最喜欢说“知其然还要知其所以然”,但是几乎所有教科书都对所以然绝口不提,有的老师自己都未必明白,叫我们学生怎么能完全把握住这个东西?(网友 minszch)深刻!这种认识到底是要自己来悟,还是应有老师来早点开窍呢?

作为一线教师和数学教学研究者,我对大学数学教师的数学知识已经形成了某些特定的期望。读了孟岩的微博和网友的评论,陷入了深深的思考:我们的线性代数教学怎么了?任课教师对线性代数的理解状况如何?怎样的教学才能让学生满意?……带着印证的目的,本研究试图调查了解任课教师对线性代数知识理解的现状,从教师和教学的角度寻找没能帮助学生真正理解线性代数内容的原因。探索克服存在问题和改变这种教学现状的方法,为大学数学老师的专业成长提供帮助。

二　为取得研究资料而设计的问题情境

1. 研究载体

克莱姆法则(Cramer′s Rule,1750 年瑞士数学家克莱姆,发表在他的《线性代数分析导言》中)[1]。克莱姆法则是一个关于求解线性方程组的定理,它给出了方程组的系数与方程组解的存在性与唯一性关系。在线性代数教学中,克莱姆法则是一定会遇到的一个教学内容。

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零,那么方程组(1)有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D},(j = 1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

其中,$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}(j = 1,2,\cdots,n)$。

2. 访谈对象

本年度讲授过线性代数课程的大学数学教师,共 18 人。其中职初教师 6 人(教龄 4 年以下,用 N 表示),工作 5 年以上的 12 人;本科学历 1 人,硕士学历 4 人,博士学历(用 D 表示)13 人;具有代数知识背景(攻读硕士、博士阶段是基础数学代数方向,用 A 表示)的 6 人;具有教学知识背景(即本科阶段是师范专业,用 T 表示)的 12 人。为了叙述方便用姓名的汉语拼音首字母代替接受访谈的老师,如 SXJ(DN)表示具有博士学位的职初教师。

收稿日期:2013－07－25
基金项目:扬州大学教改课题“基于数学理解的线性代数课程教学实践研究”(YZUJX2012——46B)
作者简介:陈建华(1963－),男,江苏如皋人,副教授,硕士,主要从事数学教育和代数学研究。

3. 访谈问题

请花点时间考虑一下,您在线性代数教学中怎样处理“克莱姆法则”这一内容的,即您是如何设计教学的?作为教师请您分析课程中与克莱姆法则相关的教学内容的结构;你觉得学生在学习克莱姆法则时需要具备怎样的知识和技能?

三 教学内容的处理与教学过程的分析

1. 职初教师的教学讨论

职初教师在讨论他们教这个课题的方法时,都是从他们期望学生学会什么开始。6 位职初教师,有 2 人认为有二、三元线性方程组行列式求解的经验,克莱姆法则只是有限推广,在讲解了高阶行列式以后,该法则不用证明,只要知道结论,会使用它即可。另外 4 人都是关注克莱姆法则的证明和运用,其中 2 人认为按照教材先给出定理,严格证明存在性、唯一性,再讲克莱姆法则的推论,即在齐次线性线性方程组上的运用,是天经地义的。他们的学生通过行列式的计算,亲自验证克莱姆法则是正确的,能通过计算行列式求解线性方程组。ZJW(DN)是刚教书的年轻教师,她对教学程序给出一个清晰的解释:

对于方程个数与未知量个数相等的线性方程组,由于系数可以组成一个行列式,克莱姆法则给出它的一个解法,使用起来很方便(实际上计算量很大)。教学中,我是讲解定理证明的,从存在性到唯一性就是行列式的计算(实际上是字母行列式,学生操作时有一定难度)。关于例题,是一个 4 元线性方程组,教学中,我演示计算行列式 D ,而 $D_j(j = 1,2,3,4)$ 采用分组让学生计算。最后,讲解推论。

这些教师的教学法的理解:学生记住克莱姆法则后,只要会准确计算行列式,就会运用法则求解此类线性方程组。还有 2 位老师则期望学生能够学会更多,而不仅仅是计算过程,他们希望学生学会在这个运算法则下所蕴含的数学原理。SFW(DN)说:

在讲解的存在性的时候,需要计算 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$,而计算中用到了行列式展开定理: $D_j = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$,以及求和的性质 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$,这是在讲解过程中特别提醒学生注意的,因为计算较繁,且符号的理解有难度。

从上述访谈情况看,6 位职初教师只论及使用了行列式的计算,从解方程组的角度,知道克莱姆法则是方程组有解的判定方法,给出了解的具体表达式。虽然有两位老师提及“行列式展开定理”和“求和的性质”,但他们是在证明的过程中“临时”使用,并不能传达对“克莱姆法则”这一数学课题的概念性理解。实际上,克莱姆法则在一定条件下给出了线性方程组解的存在性、唯一性。克莱姆法则在各种理论计算中是必需的,例如:它被用来研究 $AX = b$ 的解受 b 中数值的变化而受到什么影响等[2]。从教学内容编排讲,在“行列式”一章最后介绍克莱姆法则,一方面是说明行列式知识应用,另一方面是由于该法则在理论上的价值。从后继教学内容看,克莱姆法则联系着矩阵的等价理论、向量组的线性相关性理论等,如此安排该内容是为下几章的学习埋下伏笔,职初教师没能考虑到这些。教师期望学生所知道的与教师自己的知识是相关的,仅仅期望学生学会法则证明和使用过程的教师,往往只有过程性的理解,

2. 经验教师的教学讨论

接受访谈的经验型教师(从事教学工作 5 年以上)中有 4 人的教学设计是暂时不讲证明过程,其它 8 人讲解证明过程。在不讲证明过程的 4 人中,有 1 位教师对这个课题的理解与职初教师是同样的,认为对于非数学专业学生,不必讲解过于繁琐的东西。有 2 人的教学设计是在讲可逆矩阵时给出证明。SCH(T)认为:

第一章的末尾介绍克莱姆法则的结论,体现行列式的应用是可以的,但证明方法太繁,留待讲完可逆矩阵求法时介绍其证明方法。他给出的证明方法是:对于 $AX = b$,当 $D = |A| \neq 0$ 时,有 $X = A^{-1}b = \dfrac{1}{D}A^{*}b$, 比较等式两边向量的各个分量,就有 $x_j = \dfrac{1}{D}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}) = \dfrac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n)$。

JRZ(DAT)也是将证明安排在矩阵运算学习之后,他给出的证明方法是:

用 A_i 表示矩阵的第 i 列,则 $A\varepsilon_i = A_i(i = 1,2,\cdots,n)$, 其中 $\varepsilon_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是基本单位向量组,又 $AX = b$, 由矩阵乘法可知

$$A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},X,\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n) = (A_1,\cdots,A_{i-1},AX,A_{i+1},\cdots,A_n) = (A_1,\cdots,A_{i-1},b,A_{i+1},\cdots,A_n) \tag{3}$$

两边取行列式,由乘法规则有 $Dx_i = D_i(i = 1,2,\cdots,n)$。

还有 1 位老师认为本章只要知道克莱姆法则的结论,留待线性方程组有解判定定理讲完后介绍其证明。JHS(DAT)说:

克莱姆法则的结论,体现行列式的应用是可以的,但证明方法太繁,由于课时有限我通常不讲证明。在线性方程组有解判定定理讲完后,帮助学生回顾该定理,通过简单的推理就知道此时 $AX = b$ 有唯一解。推理过程如下:

$$D = |A| \neq 0 \Rightarrow R(A) = n \Rightarrow n = R(A) \leqslant R(A \mid b) \leqslant n \Rightarrow R(A) = R(A \mid b) = n \tag{4}$$

从教学的处理看,虽然 4 位老师不讲证明,但其中有 3 位老师(占 75 %)没“忘记”法则的证明,能将克莱姆法则与相关知识联系思考,并在适当的时候传授给学生,很明显,这些老师对克莱姆法则已达到了概念性理解。

另外 8 位经验型教师,讲解了克莱姆法则的证明。他们中注重方法改进的有 4 位老师,WJC(DAT) 和 QL(T)对唯一性证明作分别了改进,WJC(DAT)如下改进:

$$Dx_i = |A_1,\cdots,A_{i-1},x_iA_i,A_{i+1},\cdots,A_n| \overset{c_i+x_jc_j}{\underset{j\neq i}{=}} |A_1,\cdots,A_{i-1},\sum_{k=1}^{n} x_kA_k,A_{i+1},\cdots,A_n| = |A_1,\cdots,A_{i-1},b_i,A_{i+1},\cdots,A_n| = D_i$$

QL(T)则是从 D_j 出发,将 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 用 n 个方程的另一边代入计算。譬如:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{c_1 - x_j c_j}{\underset{j=2,3,\cdots n}{=}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 D$$

故 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$, 同理 $x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 2,\cdots,n)$。

CJH(AT)老师的教学过程是将课本提供的证明方法作为课外学习材料，只做方法点拨，留着学生作证明方法的对比分析。关于法则的证明，他是“构造 $n+1$ 阶行列式”，利用行列式计算技巧来讲授，希望以此巩固提升学生关于行列式的计算的技能。他提供了以下证明方法：

$$(\text{唯一性})\ x_1 D = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{c_1 + x_{j-1} c_j}{\underset{j=2,3,\cdots,n+1}{=}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1$$

所以, $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$, 同理 $x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 2,3,\cdots,n)$。

$$(\text{存在性})\text{因为}\ 0 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 D -$$

$a_{11}D_1 - a_{12}D_2 - \cdots - a_{1n}D_n$，所以有 $a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1n}D_n = b_1 D$，当 $D \neq 0$ 时，有 $a_{11}\dfrac{D_1}{D} + a_{12}\dfrac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\dfrac{D_n}{D} = b_1$ 成立，即 $x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 2,3,\cdots,n)$ 满足第一个方程，同理，这组数满足其它各个方程。

用加边法构造 $n+1$ 阶行列式，仍然是使用展开定理，在回避连加号给学生带来的理解困难的同时，又彰显了行列式计算技巧的魅力，体现了教材将“克莱姆法则”安排在这一章的目的。

教学实施中，注重课题情境设计的有 4 位老师，其中 2 人有教育硕士，1 人是教育学博士。他们回顾二元线性方程组，行列式展开定理等知识，作为介绍克莱姆法则教学的预备知识，讲课中充分考虑学生思维习惯。ZB(DT)认为：

别忘了，我们是在讨论解线性方程组，中学里解线性方程组的基本方法是“消元法”，也就是由方程的系数经过加减乘除化简方程。对于系数为字母 a_{ij} 的线性方程组，如何实现消元呢？行列式展开定理及其推论 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kt} = \begin{cases} D,(j=t) \\ 0,(j \neq t) \end{cases}$ 给我们启示。因此，我在教学的时候，将出发点改变一下：不是叙述和证明克莱姆法则，而是引导学生利用已有经验，在不知道这个定理的情况下解 n 元一次方程组，找出“法则”。

她教学设计是：按原教材证明唯一性的方法，将原方程组中各个方程分别乘常数 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$（系数行列式中第 j 列各元素的代数余子式），再相加（消去除了 x_j 以外的其余未知数）得到 $Dx_j = D_j$，从而得到唯一可能的解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n)$。这是解方程组的过程。再按原教材证明存在性的方法，将 $x_j = \dfrac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n)$ 代入原方程组检验，可知它确实是原方程组的解。在此基础上，带领学生阅读教材，理解 $\sum\sum$ 符号表示的简洁性。

以上教学方案中的证明方法与原教材相同，只不过将叙述的顺序变成先解方程组后验根，但这样组织教学，就更加符合学生解方程的习惯，关注学生的知识发展，实现数学知识的“学术形态”向“教育形态”的转化。从教学实施过程看，一方面，让学生们在解方程组的“意识”下重新发现定理、完成法则的证明. 另一方面，在抓住解线性方程组的本质的同时，通过先“繁琐”计算，再简明表达的过程，帮助学生克服对双重求和符号学习的心理障碍，接纳了知识新的表征。显然，这样的教学设计是建立在教师坚实的教学知识和对课题的深入分析的基础之上的。当然，怎么想出用代数余子式分别去乘各方程再相加的呢，李尚志老师在[4]中，从几何的视角给出了更浅显的解读，用几何概念代替繁琐的计算，让法则证明中为什么用代数余子式更自然[4]。调查中没有老师能达到该理解的深度，这说明专家型教师则能更好的帮助学生完成对课题的掌握。

四 讨 论

1. 知识包分析

由于“传道、授业、解惑”是教师的职责，教师的学科知识具有促进学生在课题学习中的获得的特殊特征，教师往往会在相关课题之间和课题内部的知识之间建立一些联系。在回答关于“分析课程中与克莱姆法则相关的教学内容的结构”问题的调查中，职初教师通常仅能够展示知识链，如知道证明法则必须的行列式展开定理和求和性质等的支持，清楚的知道自己的教学需要这些预备知识。大部分经验型教师能够联系那些支持克莱姆法则的其它知识（如：逆矩阵、伴随矩阵、矩阵的秩，向量组的线性表示、线性相关性理论等），形成一定的知识包。下图是结合文献[4]、[5]和[6]给出的关于“克莱姆法则”的一个知识包。

知识包中的所有部分都明显地与克莱姆法则学习有

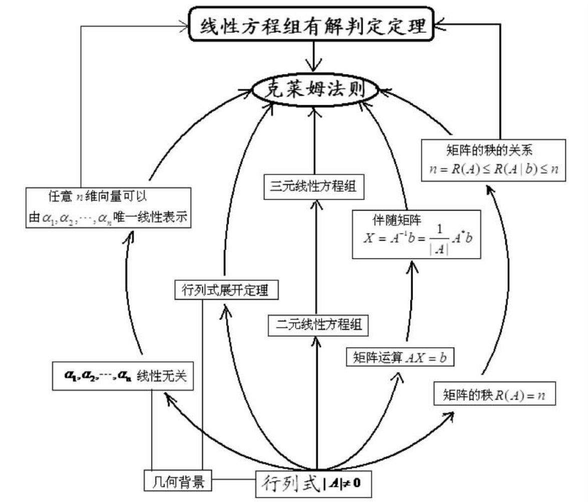

图 1　克莱姆法则的知识包

关,或支持它或受到它的支持。其中椭圆表示研究课题,长方形表示相关知识点,圆角长方形表示更一般的理论,通过有向线联系相关知识点。我们用这样的知识包来组织知识,目的是为了促进学生对克莱姆法则课题的扎实学习。当然,知识打包的方式不是固定的,严格唯一的,它依赖于某人自己的观点,不同的教师在不同的背景之下,针对不同的学生都可以不同的方式将知识“打包”。

从第三部分的分析可以看出,教师的知识理解都在包含在这个包内,大多数老师能清楚的知道其中的关键点,但由于专业知识背景的不同,教学知识的差异导致教师对知识包的各成分的了解的范围及深度有较大差异,反映了教师对克莱姆法则的理解水平。职初教师理解的深刻程度较差,只能对知识包中只有少数元素了解,且较为孤立,或只考虑到从 $|A| \neq 0$ 到法则成立的线性过程,或与法则证明直接相关的过程性课题。知识理解的离散点状或线性结构,表明他们停留在对法则的过程性理解。经验型教师(特别是具有代数背景的老师)有发展完全的、组织良好的概念性理解的知识包,他们对过程性课题(如:知识点间的局部联系)、概念性课题(如:$R(A) = R(Ab)$,向量组的唯一线性表示等)以及课题的基本原理(非齐次线性方程组的有解判定定理)有深刻的理解。如:在 12 名经验教师中,有 9 名(占 75%)表现出较为完善的知识结构,有 4 位老师展示了更深刻,带技巧的解题方法,而专家形教师则会提供了代数知识的几何背景。WJC(DAT)和 CJH(AT)等基本形成完整的知识包,熟练运用行列式的性质改进了法则的证明,“更是把简单而有效的”学科基本概念植入到法则的教学过程中,既促进了学生的概念性学习,又让学生把现在的学习与将来的学习联系起来。

关于克莱姆法则,调查中教师们表现出两种状态:第一种是知识之间的联系是无意识地激发出来的,如职初教师中 ZJW(DN),她是从数学推理的需要看,必须讲解必要的基础知识。第二种,表现出明显有意识,如经验型教师中的绝大多数,CSH(T)暂不讲过程,留待后面用矩阵求逆方法讲,SJH(DAT)用线性方程组理论解释,还有改进证明方法的几位老师。这种差别与教师的学科知识、教学知识上的差别有密切联系,有意识将知识打包的老师们,能清晰的描述他们的知识包中的组成元素,且知晓在这个知识包中(网络结构)中各元素的地位及逻辑关系。

2. 小结

数学学习中,“理解”无疑是第一位的,而“数学理解”已成为继“问题解决”之后当今世界数学教育界所关注的又一中心话题(PME News May 1997 edition, Mathematics Forum).“为理解而教(Teaching for Understanding)”作为一种重要教学思想已经逐渐被数学教育界所接受.理解性数学教学的根本宗旨是要使学习者获得对数学的充分理解。如何实现基于理解的数学教学,从以上关于克莱姆法则的教学分析,表明:

第一,大学数学教学中,对数学定理的概念性理解是有数学论证的支撑的,大学数学教学不能放弃数学论证的教学。

第二,强调多种课题之间的联系,把知识“打包”,一组一组地、立体地理解数学课题,是一种有效的理解方式。大学数学教学中,教师应该全面理解课程内容,形成了一个个知识包(针对不同定理),而不仅仅是知识序列,这比单独讨论定理的证明过程或强调某种证明技巧更为重要。

第三,具有良好的教学法知识的老师,能更有效地帮助学生理解课题。虽然大部分教师能够顾及学生的认知水平,但具体操作中,有深厚教学法知识的老师,表现出更有章法地组织教学。

第四,同一课题的概念性理解是多样的,具有不同的版本。对学科内容有不同见解的教师,会让学生得到不同的数学理解。

教师的学科知识不能自动地产生成功的教学方式和教学理念,缺乏坚固的学科支撑,成功的教学方式和新颖的教学理念不可能实现。如何从问题情境开始,在解决问题的过程中将所要学习的知识一步一步“发明”出来,让知识的引入如“随风潜入夜”,知识的应用如“润物细无声”[5],任重道远。改变大学数学教学现状,既需要改进教师的数学知识结构,也需要充实教学知识。

参考文献:

[1] 陈建华,刘金林,魏俊潮. 线性代数(第 3 版)[M]. 北京:机械工业出版社, 2011.

[2] David C Lay. 线性代数及其应用[M]. 刘深泉等译. 北京:机械工业出版社,2005.

[3] 马　复. 试论数学理解的两种类型——从斯根普的工作谈起[J]. 数学教育学报,2001(3):50 - 53.

[4] 李尚志. Crammer 法则教学的问题和对策[J]. 大学数学,2009(6):1 - 5.

[5] 李尚志. 线性代数[M]. 北京:高等教育出版社,2011.

[6] 陈建华,李立斌,凌　智,等. 基于问题解决的线性代数课程教学设计研究[J]. 高等理科教育,2011(4):117 - 119,152.

(责任编校　罗　渊)