

普通高等学校数学类课程的教学理念和教学方法

——以“数学分析”和“实变函数”课程为例

费明稳

(安徽师范大学 数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241002)

摘 要:高等教育是一个国家可持续发展的重要组成部分,而数学教育又是高等教育的基石。课堂教学是数学教育中传授知识和技能的重要渠道。丰富的教学活动和良好的教学效果强烈依赖于明确的教学理念和有效的教学方法。以“数学分析”和“实变函数”两门课程的教学为例,结合自己多年来的教学经历和体会,阐述普通高等学校数学类课程的教学理念,并围绕着教学理念探究教学措施和方法,希望以己拙见抛砖引玉。

关键词:数学分析;实变函数;理念;方法

中图分类号:G642.0

文献标志码:A

文章编号:1674-5884(2017)03-0034-04

自1949年以来,中国高等教育进入了一个新的历史发展时期。60多年来,中国高等教育经历了建国初期全面构建社会主义教育体系的仿苏时期、文革十年的“教育革命”时期、改革开放至今高等教育快速发展的3个阶段的历史变迁。随着我国高等教育的历史变迁和20世纪以来科学思潮的影响,人们意识到教学也是科学,可以用科学的方法加以研究。本文以“数学分析”和“实变函数”课程为例,探究普通高等学校数学类课程的教学理念,进而提出围绕着教学理念而采取的一些教学措施和方法,希望以己拙见抛砖引玉。

1 教学理念

教学理念是人们对教学活动的看法和持有的基本的态度和观念,对教学活动有着极其重要的指导意义^[1]。普通高等学校数学课程的教学本质上是数学思维能力的训练和数学素养的培养。数学教学不仅要讲授概念、结论和方法等“硬知识”,而且要传授发现问题的方法、思考问题的方式和解决问题的渠道等“软知识”。数学教学的终极目标就是培养学生凭借良好的数学素养发现数学乃至自然界中的问题,利用较强的数学思维能力去分析问题,依靠扎实的专业知识去解决问题。首先,在讲授知识的同时,尽量挖掘重要概念产生的背景^[2],帮助学生从多个角度直观地理解某些概念和定理,以及理性分析复杂定理所遵循的数学思想等,从而一点一滴培养学生的数学能力和数学素养;其次,在教学过程中,有意识地将知识点进行交叉、比较和应用,特别是将数学建模的思想方法渗透到教学课程中,让学生感受到数学“有用”,从而激发学习知识和培养能力的主动性;再次,将自己的科研工作适当地引入到教学中,让学生将目前的学习任务和将来的工作或学习联系在一起,让学生在研究问题中领悟到“为什么学”“学什么”和“怎么学”等。

2 教学体会

“数学分析”“实变函数”一般分别是作为数学专业本科阶段一年级和三年级的课程。笔者从大学阶段学这些课,到工作以后教这些课,在教学理念方面有以下几点具体的体会以及采取的措施。

2.1 “数学分析”的核心内容之一是黎曼积分理论,“实变函数”的核心内容之一是勒贝格积分理论

数学分析中连续函数的黎曼积分定义比较直接,而一般的《实变函数》^[3-5]教材是按照“简单函数的勒贝格积分-非负可测函数的勒贝格积分-一般可测函数的勒贝格积分”这条主线来定义勒贝格积分。可以看出,在正式给出一般可测函数的勒贝格积分定义之前,需要做大量“艰苦细致”的铺垫工作。这也是这门课之所以难学的原因之一。虽然难学,但是在勒贝格积分理论中,函数列的“极限”和“积分”这两种运算以及级数的“求和”和“积分”这两种运算可以交换的条件,比黎曼积分理论中所需要的条件弱。因此勒贝格积分相比于黎曼积分,更加有优越性和适用性,这也是我们为什么要学习和使用勒贝格积分的一个重要原因之一。

经过认真梳理和归纳,我们发现建立两套积分理论的体系基本上是一致的。数学分析建立黎曼积分理论的体系是“极限-连续函数-连续函数黎曼积分的定义-黎曼积分的性质”。实变函数建立勒贝格积分理论的体系是“度量-极限-测度-可测函数-简单函数的勒贝格积分-一般可测函数的勒贝格积分-勒贝格积分的性质”。由于欧式空间中两个点的距离就是一种度量,长度、面积和体积就是一种测度,所以《数学分析》^[6-8]教材中没有“度量”和“测度”这部分内容,因此体系基本上是一致的。

2.2 用数学分析的直观来理解实变函数的抽象

实变函数这门课所涉及的概念以及与之相关的结论比较抽象。学习和理解抽象的东西,其中一个很重要的途径就是,用直观的简单的东西来帮助理解。笔者个人认为,教好实变函数,离不开数学分析的直观。因为本科阶段低年级开设的数学分析的内容,可以用来帮助我们理解实变函数的抽象。现举例如下。

实变函数中的“度量”可以定义于任一非空集合。由于是针对任一非空集合,“就事论事”,无疑很难去想象。但是,如果回归到数学分析中的欧式空间,两点之间的度量就是我们通常说的两点之间的距离公式,一般的邻域就是我们通常说的开球,度量的定义中的“三点不等式”就是欧式空间中的绝对值不等式。不仅如此,与度量空间有关的极限、收敛等重要概念和相关的结论,我们都可以类比到欧式空间,从而帮助我们理解以及寻找解决问题的途径。

数学分析中的黎曼积分的定义,概括起来是三步:分割-近似求和-求极限。一般可测函数的勒贝格积分的定义比较抽象,但是也包含着“三步走”的思想。勒贝格积分的定义,可以追溯到勒贝格测度的定义。而勒贝格测度是可测集的外侧度,因此最根本的定义是外侧度。研究外侧度的定义,我们可以归纳为三步:覆盖-求体积之和-求下确界。注意到“求下确界”本质上就是一个极限过程,因此外侧度的定义进一步可以归纳为三步:覆盖-求和-求极限。另外,连续函数的黎曼积分定义和简单函数的勒贝格积分定义,起点都是“分割”。不同的是,黎曼积分是将函数的定义域进行分割,勒贝格积分是将函数的值域进行分割。

2.3 借助这两门课的教学,着重培养和提高学生的分析能力

所谓“分析”就是“分而剖析,进而解决”。在遇到一个证明题时,首先要清楚各个条件和结论本身的含义,然后可以采用“倒推”“画图”等手段来寻找条件和结论之间的关联性,从而搭建条件和结论之间的桥梁,最后用严谨的数学语言有条理地写出证明过程。在这个过程中,最重要的是“胆大”。有时候未必一下子就能找到正确的解决方法,此时要敢于尝试多种方法。有时候即使找到正确方法,但是离结论还有一段距离,此时要敢于坚持,勇往直前。在证明结束后,可以画一个示意图,勾画出证明的思路,标出证明的关键之处。同时,明确每个条件在定理证明过程中所扮演的角色,总结证明中所使用的分析技巧。进一步可以思考:可有其他证明的方法;如果某个条件去掉,结论是否成立;结论的逆命题是否成立;找出与之相关的一些结论之间的区别和联系等等。

2.4 以教学改革和创新为契机,强化教学理念的指导意义

为了调动学生学习的积极性,鼓励学生“多问”,避免疑难问题积少成多,提高学习效率,培养与他人交流和沟通的能力,建立了以“问问题的数量”作为主要考核指标的平时成绩测算机制。学生问问题的数量定期登记在平时成绩栏上,期末考试前汇总每个人问问题的数量,作为平时成绩考核的一个主要指标。

为了强化学生内在的学习动力,培养学生的数学思维能力和数学素养,提高学生的应用能力和研究能力,在平时的教学各个环节中有意识地融入自己的科研工作,将自己的科研成果有机地和教学内容结合在一起。同时,积极鼓励高年级学生申请“安徽师范大学本科生优秀毕业论文培育计划”,发现优秀的学生并加以指导。目前已经指导2名本科生主持完成“安徽师范大学本科生优秀毕业论文培育计划”项目,正在指导2名本科生主持“安徽师范大学本科生优秀毕业论文培育计划”项目。

另外,在教学过程中,我们积极参与教学建设,参与遴选教材;积极撰写教学研究论文,积极参与和申请教学研究项目,积极打造慕课课程。

3 教学方法

教学方法是教学过程中教师与学生以实现教学目的和教学任务要求,在教学活动中所采取的行为方式的总称。

3.1 讲授法

讲授法主要是使用口头语言、板书等来实施教学的一种行之有效的教学方法。讲解概念及其基本性质的时候,以讲授法为主。数学的概念居多,特别是高年级的实变函数与泛函分析基础课程。但是讲授法不等于直接灌输。首先,讲授法不仅讲解概念本身的内容,而且会适当地讲解概念本身产生的背景和背后的数学故事,引起学生学习的兴趣。同时讲解概念导出的一系列基本性质和相关结论,让学生明白概念“简约而不简单”,从而理解数学语言的简练和概念的重要性。其次,讲授法中针对一个定理的证明所采用的严谨详细的板书推导过程,实际上是教师主导、学生参与、师生思维冲撞、共振式的讲授。这个过程不仅让学生准确把握定理的证明,而且能够培养学生的逻辑思维能力和严谨的数学素养。再次,一个定理证明的结束,并不意味着讲授的结束。定理证明结束后,借助板书画出定理证明思路的示意图,借助示意图讲授定理证明思路、证明的关键步骤和所使用的主要技巧,让学生整体把握定理的证明,从而提高学习效率,强化学习数学的内在动力。

3.2 研讨式教学法,包含课堂提问和课堂讨论

课堂提问一方面是用来考察学生的学习效果,及时发现教学上存在的问题,同时也帮助学生反复熟悉重要概念和结论;另一方面通过提出针对性的问题来激发学生积极思维,进一步引入课堂讲授内容,从而以“问题驱动”的模式来展开教学,提高学生课堂听课效率。以《实变函数与泛函分析基础》^[3]第四章第三节“可测函数的构造”为例。为了引入该节讲授的主要内容“鲁津定理”,首先提问“可测集上的连续函数一定是可测函数吗”,这是前一节课所学的内容之一,答案是肯定的。然后,分析学生熟悉的Dirichlet函数一个性质:在实数轴上处处不连续但是一个可测函数。进而,提出一个问题:可测函数与连续函数到底相差多远?这实际上就是“鲁津定理”的内容,从而引入讲授内容。

课堂讨论即教师提出一个合适的问题,加以引导,师生共同探究,逐渐找寻结论或解决办法。通过课堂讨论,活跃了课堂气氛,提高了学生学习和思考的积极性,培养了学生发现问题、分析问题和解决问题的能力,同时通过解决问题加深对知识的掌握和理解。以《实变函数与泛函分析基础》^[3]第五章第三节“非负可测函数的勒贝格积分”为例。定义讲授结束后,教师提出一个问题“黎曼积分和勒贝格积分定义的不同之处和相同之处有哪些”,因为黎曼积分也是非常重要的而且是学生熟悉的概念,所以这个问题是一个合适、自然、重要的问题。先让学生独自思考5 min,然后让学生相互讨论4 min,然后选一名学生代表回答,最后师生一起探讨。课堂效果表明,学生不仅加深了对黎曼积分的

理解,而且加深了对勒贝格积分的理解,同时体会到学习勒贝格积分的缘由,从而激发了进一步学习的动力。

3.3 自主型教学法,包括课前自学和课后研究性学习

课前自学即在教学过程中,教师把下堂课要学习的内容、要掌握的知识以问题的形式留给学生,让学生带着问题有目的地去自学,有意识地培养自学能力,使学生学会自主学习。以《实变函数与泛函分析基础》^[3]第二章第五节“康托尔三分集”为例。由于本节内容比较抽象属于难点,所以在教学中,先让学生提前自学,特别是提前熟悉康托尔三分集的构造和实数的二进制、三进制表示,然后课堂上详细讲授。课堂效果表明,有了前期的自主性预习,课堂上能够容易消化康托尔三分集的定义及相关内容。

课后研究性学习即教师确定一个问题,以类似科学研究的方式,把学习从课内延伸到课外,让学生应用所学知识来解决问题,通过解决问题让学生理解所学知识、感悟学习方法、提高数学思维能力,进一步培养学生创新能力和实践能力。以《实变函数与泛函分析基础》^[3]第七章第六节“压缩映射原理及其应用”为例。本节的主要内容是压缩映射定理,该定理其中一个很重要的应用就是证明微分方程或积分方程解的存在性和唯一性。本章习题这方面的题目很少。在本节课堂结束后,布置了一个“探讨某类积分方程解的存在性和唯一性”的问题,并作为平时成绩考核的一个重要依据。课下学生积极思考,相互讨论,有的学生还查阅了部分文献,最终大部分学生给出了正确答案。此次研究性学习拓宽了学生学习的渠道,取得了预期的教学效果。

4 结语

本文以“数学分析”和“实变函数”两门高等学校数学类课程为例,结合自己多年的教学实践和体会,阐述了普通高等学校数学类课程的三个教学理念:挖掘数学思想、注重知识点的应用和融科研于教学之中,并分析了三种针对性的教学方法:讲授法、研讨式教学法和自主型教学法。在理论分析的同时,还给出了许多具体的教学设计。

参考文献:

- [1] 郭九苓. 教学的魅力——北大名师访谈录(第一辑)[M]. 北京:北京大学出版社,2010.
- [2] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想[M]. 张理京,译. 上海:上海科学技术出版社,2014.
- [3] 程其襄,张奠宙,魏国强,等. 实变函数与泛函分析概要(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社,2010.
- [4] 周民强. 实变函数论[M]. 北京:北京大学出版社,2001.
- [5] 徐森林. 实变函数论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2002.
- [6] 华东师范大学数学系. 数学分析(第三版)[M]. 北京:高等教育出版,2001.
- [7] 陈纪修,於崇华,金路,等. 数学分析(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,2004.
- [8] 常庚哲,史济怀,等. 数学分析教程[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

(责任校对 朱正余)