第 15 卷 第 1 期
2023 年 1 月
当代教育理论与实践
Theory and Practice of Contemporary Education
Vol.15 No.1
Jan. 2023

doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2023.01.010

# 几个矩阵的秩不等式等号成立的条件

冯立华,胡志,刘伟俊,李宸,鲁卢

(中南大学 数学与统计学院,湖南 长沙 410083)

**摘　要**:在“高等代数”的教学过程中,如何进一步启迪学生的发散思维,以科学严谨的眼光对待某些例题与习题,并进一步挖掘题目中蕴含的问题,是非常值得思考的问题。在教学实践中,我们针对矩阵的秩的不等式问题,跟学生进一步探讨等号成立的充要条件,这是科学思维渗透教学过程的具体体现。

**关键词**:矩阵;秩;不等式;等式

**中图分类号**:O151.21,G642.0　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-5884(2023)01-0058-06

## 1　简介

当前,“以本为本”“立德树人”等教育理念已深入人心,而数学作为自然科学的基础得到了极大的重视。作为国家一流本科建设专业,我们致力于提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力,注重学生科学思维方法的训练和科学伦理的教育;培育学生科学的精神与科学情怀,培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感,培养具有坚实数理基础的高素质的数学创新人才和具有解决重大应用数学问题潜质的复合型创新人才。在教学过程中,我们时常启发学生顺应时代潮流,勇于担当,而且针对学生的课程学习我们提出了更高的要求,以期其学识能匹配本专业的新要求。

“高等代数”是数学学科最重要的专业基础课程之一,对于数学专业学生数学素养的形成起着关键作用。它以严密的逻辑、系统的推理、抽象的思维为特点,其内容包括多种线性系统和结构。在研究繁杂的问题时,线性化是其中常用的一种途径,高等代数可以为问题的解决提供初步的答案;同时各种不同的范畴中线性部分又有一定的共性,高等代数又可以为之提供统一的平台,对其理论研究提供指导。因此,高等代数学被广泛地应用到自然科学的各个领域。

当前“高等代数”的课程教学中,各类教学方法、教学内容、教学深度等改革的问题亟待解决。如何抓住重要理论的突破口,讲清楚关键想法,循序渐进,深入思考,层层分析问题,为大部分同学提供更好的、更深入的问题引导的学习,是我们经常思考和使用的手段。

矩阵的秩是数学专业大学一年级上学期高等代数的一个重要内容,其联系广泛、思路开阔、不易掌握。而且该部分内容对求解线性方程组、相似矩阵和二次型等后续课程的学习有着重要的作用,是每个高校教学的重点。本文主要采用案例分析法,归纳总结了教材与参考书[1-4]中的一些关于矩阵秩的重要不等式,启发学生继续思考如何寻找等号成立的条件,再将它们应用到解决复杂的题目中去。同时,结合实例分析那些重要的不等式的使用情况。

## 2　一些例子

毛主席曾说:“世界上怕就怕‘认真’二字,共产党就最讲认真。”确实,“认真”是我们学好本课程的重要原则。我们已经熟知 $\mathrm{rank}(A) \leqslant \mathrm{rank}(A,B)$ 。在教学过程中,针对类似的例题,我

**收稿日期**:2022-04-01
**基金项目**:国家自然科学基金(12271527,12071484);湖南省自然科学基金(2018JJ2479,2020JJ 4675)
**作者简介**:冯立华(1979—),男,山东五莲人,教授,博士,主要从事代数图论研究。

们会将其作为课后研讨与思考的题目启发学生：等号什么情况下成立？我们得到两种不同的证明。

**例 1**　设 $A,B$ 分别是数域 $F$ 上的 $s\times n, s\times m$ 矩阵，用 $(A,B)$ 表示在 $A$ 的右边添上 $B$ 得到的 $s\times(n+m)$ 矩阵。证明：$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,B)$ 当且仅当 $B$ 的列向量组可以由 $A$ 的列向量组线性表出。

证法一 设 $A$ 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$B$ 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，则 $(A,B)$ 的列向量组为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$。

显然，其生成子空间满足

$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle\subseteq\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\rangle$。

于是有 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}((A,B))$

$\Leftrightarrow\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle=\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\rangle$

$\Leftrightarrow\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\rangle$

$\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$

$\Leftrightarrow B$ 的列向量组可以由 $A$ 的列向量组线性表出。

证法二 设 $A,B$ 的列向量组分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$。显然向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出。于是得

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}((A,B))$

$\Leftrightarrow\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$

$\Leftrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$

$\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$\Leftrightarrow B$ 的列向量组可以由 $A$ 的列向量组线性表出。证毕。

已知矩阵 $AB$ 的秩小于等于矩阵 $A$ 的秩与矩阵 $B$ 的秩中最小的那个，即 $\mathrm{rank}(AB)\leqslant\min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$，那么等号成立需要什么条件呢？我们有

**例 2**　设 $A,B$ 分别是数域 $F$ 上的 $s\times n, n\times m$ 矩阵，证明：$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$ 当且仅当齐次线性方程组 $(AB)x=0$ 的每一个解都是 $Bx=0$ 的一个解。

证明 必要性。设 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$，由于线性方程组 $Bx=0$ 的每一个解都是 $(AB)x=0$ 的一个解，因此 $Bx=0$ 的解空间为 $W_1$ 是 $(AB)x=0$ 的解空间 $W_2$ 的子集。又由已知条件得

$\dim W_2=m-rank(B)=\dim W_1$，

因此 $W_2=W_1$。从而 $(AB)x=0$ 的每一个解都是 $Bx=0$ 的一个解。

充分性。设 $(AB)x=0$ 的每一个解都是 $Bx=0$ 的一个解，则 $W_2\subseteq W_1$。显然 $W_1\subseteq W_2$，因此 $W_1=W_2$。由齐次线性方程组的解空间的维数公式立即得到 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$。

例 2 的证明是利用了解空间与维数公式。我们进一步启发学生：是否还有其他的办法？经过思考，我们还能够得到另外一个充要条件。

**例 3**　设 $A,B$ 分别是数域 $F$ 上的 $s\times n, n\times m$ 矩阵，证明 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$ 的充分必要条件是矩阵方程 $ABX=A$ 有解。

证明 设 $A$ 的列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$AB$ 的列向量组是 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$。易见 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。我们可得

矩阵方程 $ABX=A$ 有解

$\Leftrightarrow\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(AB,A)$

$\Leftrightarrow\mathrm{rank}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}=\mathrm{rank}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

$\Leftrightarrow\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}\cong\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$ 线性表出

$\Leftrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cong\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$

$\Leftrightarrow\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=\mathrm{rank}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$

$\Leftrightarrow\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AB)$，证毕。

Sylvester 秩不等式是矩阵论中一个非常著名的不等式，其证明方法多样，有利用分块矩阵的证明，也有纯粹矩阵理论的证明。我们启发学生用解空间的关系可以得到一个几何的证明，但其等号成立的条件在教材中鲜见。

我们称两个 $m\times n$ 的矩阵 $A$ 与 $B$ 是相抵的，若存在 $m$ 阶可逆矩阵 $P$ 与 $n$ 阶可逆矩阵 $Q$，使得 $PAQ=B$。

**例 4（Sylvester 秩不等式）**　设 $A$ 和 $B$ 分别是数域 $F$ 上 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵，证明：$\mathrm{rank}(AB)\geqslant\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n$，

且 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)+\mathrm{rank}(A)-n$ 的充分必要条件是两个矩阵

$\begin{pmatrix}AB & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 相抵。

证明 本证明用到了维数公式。考虑解空间

$V_A=\{x\in F^n:Ax=0\}$,

$V_B=\{y\in F^p:By=0\}$,

$V_{AB}=\{z\in F^p:ABz=0\}$

的维数分别是 $\dim V_A=n-\mathrm{rank}A,\dim V_B=p-\mathrm{rank}B,\dim V_{AB}=p-\mathrm{rank}AB$, 记

$V_0=\{x\in F^n:x=By,y\in V_{AB}\}$。

容易验证, $V_0$ 是 $F^n$ 的子空间,并且 $V_0\subseteq V_A$。如果能够证明

$$\dim V_0=\dim V_{AB}-\dim V_B, \tag{1}$$

则结论已经成立。下面证明式(1)成立。

记 $\dim V_B=s,\dim V_{AB}=t$。由于 $V_B\subseteq V_{AB}$, 所以,子空间 $V_B$ 的基 $\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$ 可以扩成 $V_{AB}$ 的基 $\{y_1,y_2,\cdots,y_s,y_{s+1},y_{s+2},\cdots,y_t\}$, 显然, $By_{s+1},By_{s+2},\cdots,By_t\in V_0$。设

$\lambda_{s+1}y_{s+1}+\lambda_{s+2}y_{s+2}+\cdots+\lambda_ty_t=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_sy_s$,

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\in F$。因此

$\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_sy_s+(-\lambda_{s+1})y_{s+1}+(-\lambda_{s+2})y_{s+2}+\cdots+(-\lambda_t)y_t=0$,

由于 $\{y_1,y_2,\cdots,y_s,y_{s+1},y_{s+2},\cdots,y_t\}$ 是 $V_{AB}$ 的基,所以, $\lambda_{s+1}=\lambda_{s+2}y=\cdots=\lambda_t=0$。这表明 $V_0$ 中向量 $By_{s+1},By_{s+2},\cdots,By_t$ 线性无关,其次,设 $x\in V_0$, 则存在向量 $x\in V_{AB}$, 使得 $x=By$。由于 $y\in V_{AB}$, 而 $\{y_1,y_2,\cdots,\lambda_sy_s,y_{s+1},y_{s+2},\cdots,y_t\}$ 是 $V_{AB}$ 的基,因此

$y=a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+\cdots+a_sy_s+a_{s+1}y_{s+1}+\cdots+a_ty_t$, 其中 $a_1,a_2\cdots,a_t\in F$, 所以

$x=By=a_1By_1+a_2By_2+a_3By_3+\cdots+a_sBy_s+a_{s+1}By_{s+1}+\cdots+a_tBy_t$,

由于向量 $y_1,y_2,\cdots,y_s\in V_B$, 所以 $By_1=By_2=\cdots=By_s=0$。因此

$x=a_{s+1}By_{s+1}+a_{s+2}By_{s+2}+\cdots+a_tBy_t$,

这就证明, $\{By_{s+1},By_{s+2},\cdots,By_t\}$ 是子空间 $V_0$ 的基,于是, $\dim V_0=\dim V_{AB}-\dim V_B$, 获证。

现在考虑等号成立的情况。

作分块矩阵的初等行(列)变换:

$$\begin{pmatrix}AB&0\\0&I_n\end{pmatrix}\xrightarrow{1+A\cdot 2}\begin{pmatrix}AB&A\\0&I_n\end{pmatrix}\underset{1+2(-B)}{\rightarrow}\begin{pmatrix}0&A\\-B&I_n\end{pmatrix}\underset{(1,2)}{\rightarrow}\begin{pmatrix}A&0\\I_n&-B\end{pmatrix}\underset{2(-I_n)}{\rightarrow}\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}AB&0\\0&I_n\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix}。$$

从而

$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n$

$\Leftrightarrow\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(I_n)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

$$\Leftrightarrow\mathrm{rank}\begin{pmatrix}AB&0\\0&I_n\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A&0\\I_n&B\end{pmatrix}\overset{\text{相抵}}{\sim}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}。$$ 证毕。

我们会继续给学生推广 Sylvester 秩不等式。

**例5(Frobenius 秩不等式)** 设 $A,B$ 和 $C$ 分别是数域 $F$ 上 $m\times n,n\times p$ 和 $p\times q$ 矩阵,试证明

$$\mathrm{rank}(ABC)\geqslant\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC)-\mathrm{rank}(B), \tag{2}$$

其中等号成立的充分必要条件是矩阵

$\begin{pmatrix}AB&0\\0&BC\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}AB&0\\B&BC\end{pmatrix}$

相抵。

证明 由式(2)得到

$\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC)\leqslant\mathrm{rank}(ABC)+\mathrm{rank}(B)$。

因此式(2)等价于

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}AB&0\\0&BC\end{pmatrix}\leqslant\mathrm{rank}\begin{pmatrix}ABC&0\\0&B\end{pmatrix}。 \tag{3}$$

由于

$$\begin{pmatrix}I_m&A\\0&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABC&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_q&0\\-C&I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-I_q\\I_p&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB&0\\B&BC\end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中方阵

$\begin{pmatrix}I_m&A\\0&I_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}I_q&0\\-C&I_p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-I_q\\I_p&0\end{pmatrix}$

都是可逆的,因此都可看作是一些初等矩阵的乘积,

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}ABC&0\\0&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}AB&0\\B&BC\end{pmatrix}。$$

但是,

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}AB&0\\0&BC\end{pmatrix}\leqslant\mathrm{rank}\begin{pmatrix}AB&0\\B&BC\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}ABC&0\\0&B\end{pmatrix}。 \tag{5}$$

这就证明式(3)成立,容易看出,式(3)中等式成立的充分必要条件是式(5)等号成立,证毕。

特别是,在例 5 中,当 $B$ 取为 $n$ 阶单位方阵时,Frobenius 秩不等式即为

$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(C)-n\leqslant \mathrm{rank}(AC)$。

结合例 1,我们得到

$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n\leqslant \mathrm{rank}(AB)\leqslant \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$。

**例 6**　$n$ 阶方阵 $A$ 的伴随方阵记为 $A^*$。试证明:

(1) $\mathrm{rank}(A^*)=n$ 的充必要条件是 $\mathrm{rank}(A)=n$;

(2) $\mathrm{rank}(A^*)=1$ 的充必要条件是 $\mathrm{rank}(A)=n-1$;

(3) $\mathrm{rank}(A^*)=0$ 的充必要条件是 $\mathrm{rank}(A)<n-1$。

证明 (1)当 $\mathrm{rank}(A)=n$ 时 $|A|\neq 0$, $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$, 故 $\mathrm{rank}(A^*)=n$; 反之亦然。

(2) $\mathrm{rank}(A)=n-1$ 时,$A$ 至少有一个 $n-1$ 级子式 $\neq 0$, 即 $A^*\neq 0$, $\mathrm{rank}(A^*)\geqslant 1$。这时又 $\mathrm{rank}(A)=n-1$, $|A|=0$。故 $AA^*=|A|E=O$。又 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A^*)\leqslant n$, 故我们得到 $\mathrm{rank}(A^*)\leqslant n-(n-1)=1$, 所以 $\mathrm{rank}(A^*)=1$; 反之亦然。

(3)当 $\mathrm{rank}(A)<n-1$ 时,$A$ 的任意 $n-1$ 行皆线性相关,故它的任意 $n-1$ 级子式都为 0。所以 $A^*=0$, 因而 $\mathrm{rank}(A^*)=0$。反之亦然,证毕。

在利用分块矩阵的准初等变换解决矩阵的秩的时候,我们启发学生思考以下秩不等式取等号的问题。

**例 7**　设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,则 $A^2=I$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$。

证明必要性。由

$$\begin{pmatrix}A+I & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+I & A-I\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I & A-I\\ -A+I & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I & A-I\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$。

充分性。由

$$\begin{pmatrix}A+I & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+I & A-I\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I & A-I\\ -A+I & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2E & A-I\\ 0 & \dfrac{A^2-I}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I & 0\\ 0 & \dfrac{A^2-I}{2}\end{pmatrix},$$

因为 $\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$, 故 $A^2-I=0$, $A^2=I$。证毕。

**例 8**　设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,则 $A^2=A$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A-I)=n$。

证明必要性。由

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & A-I\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & A-I\\ -A+I & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E & A-I\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A-I)=n$。

充分性。由

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & I-A\\ 0 & I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & I-A\\ I-A & I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & I-A\\ 0 & A-A^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & A-A^2\end{pmatrix},$$

因为 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A-I)=n$, 故 $A^2-A=0$, $A^2=A$。证毕。

在本文的最后,我们考察"高等代数课"程中一个大家熟知的不等式,但是等号成立的条件却鲜为人熟知。我们鼓励学生思考该问题,并得到一个解答,作为课本例题的有益补充。

**例 9**　证明: $\mathrm{rank}(A+B)\leqslant \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$。

证明 设 $A,B$ 的列向量组分别为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,

则 $A+B$ 的列向量组为

$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$。

设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组;设 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$ 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的一个极大线性无关组,则 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可以由向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$ 线性表出,因此

$\mathrm{rank}\{\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n\}\leqslant \mathrm{rank}\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}\}\leqslant r+t$

于是 $\mathrm{rank}(A+B)\leqslant \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$。证毕。

以下我们考虑例 9 等号成立的情况。由于事情并不显然,而且国内现行课本里面基本都没有关于此结论的证明,我们查阅了相关文献[5-7],结合已有知识,单独拿出来进行证明。

**例 10**　设 $A$、$B$ 分别是数域 $F$ 上的 $m\times n$ 矩阵,则 $\mathrm{rank}(A+B)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 当且仅当 $C(A)\cap C(B)=\{0\}$ 和 $R(A)\cap R(B)=\{0\}$。

这里 $C(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示矩阵 $A$ 列向量空间和行向量空间。

证明 我们只证明后面部分。根据适当的行和列计算，我们可以将 $A$ 化简成 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r = \text{rank}(A)$ 且 $I_r$ 是一个 $r \times r$ 的单位矩阵。换言之，$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $P$、$Q$ 是可逆矩阵，是一些执行行和列运算的初等矩阵的乘积。用一个可逆矩阵来左乘或者右乘并不会改变矩阵的秩，所以

$\text{rank}(PAQ) = \text{rank}(A)$，$\text{rank}(PBQ) = \text{rank}(B)$，

$\text{rank}(PAQ + PBQ) = \text{rank}[P(A+B)Q] = \text{rank}(A+B)$。

同样，因为经过可逆的线性变换后并不会改变子空间的维数，若 $C(A) \cap C(B) = \{0\}$ 和 $R(A) \cap R(B) = \{0\}$ 成立，则有 $C(PAQ) \cap C(PBQ) = \{0\}$ 和 $R(PAQ) \cap R(PBQ) = \{0\}$。因此，根据假设，连同左乘与右乘可逆矩阵后的秩的不变性，可以假设 $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

令 $s = \text{rank}(B)$，$U$ 是一个由 $s$ 个线性无关的列向量构成的 $m \times s$ 矩阵，这 $s$ 个线性无关的列向量生成 $C(B)$。故 $B = UV$，其中 $V$ 是一个 $s \times n$ 矩阵，它每一列的元素都是 $B$ 的列作为 $U$ 的列的线性组合表示所对应的系数。显然，$U$ 的秩为 $s$；因为 $R(B) \subseteq R(V)$，所以 $V$ 的秩也为 $s$。$\text{rank}(V) = \dim R(V) \leqslant s$。我们的目的是找出 $A+B$ 的一个 $(r+s) \times (r+s)$ 可逆子矩阵，这说明了 $\text{rank}(A+B) \geqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$。为此，将 $U$ 和 $V$ 分别划分为 $U = \begin{pmatrix} U_r \\ U_p \end{pmatrix}$ 和 $V = (V_r \quad V_q)$，其中 $U_r$ 是一个 $r \times s$ 矩阵，$V_r$ 是一个 $s \times r$ 矩阵。我们断言 $U_p$ 的列线性无关。为此，假设对于某一个向量 $x \in F^s$ 有，$U_p x = 0$。则由 $C(A) \cap C(B) = \{0\}$ 有 $Ux = \begin{pmatrix} U_r x \\ 0 \end{pmatrix}$，根据 $A$ 的选择，$C(A)$ 由 $F^n$ 中的向量构成，这些向量的所有元素在出现了第一个 $r$ 行之后均为 0。因此 $Ux = 0$，并且由于 $U$ 的列线性无关，可得 $x = 0$。这说明 $U_p$ 的列线性无关；换言之，$rank(U_p) = s$。因为 $U_p$ 有一个 $s \times s$ 可逆子矩阵 $U_s$，它的行是由 $\{r+1, \cdots, r+p = m\}$ 的一个子集 $J$ 来指出。同样，通过转置和使用行向量空间假设，同样可以证明 $V_q$ 有一个 $s \times s$ 可逆子矩阵 $V_s$，它的列是由 $\{r+1, \cdots, r+q = n\}$ 的一个子集 $K$ 来指出。现在，$B$ 的 $(r+s) \times (r+s)$ 子矩阵，它的行由 $\{1,2,\cdots,r\} \cup J$ 来指出，它的列由 $\{1,2,\cdots,r\} \cup K$ 来指出，并且这个子矩阵是 $\begin{pmatrix} U_r \\ U_s \end{pmatrix} (V_r \quad V_s) = \begin{pmatrix} U_r V_r & U_r V_s \\ U_s V_r & U_s V_s \end{pmatrix}$，所以 $A+B$ 对应的那个子矩阵就是 $\begin{pmatrix} I_r + U_r V_r & U_r V_s \\ U_s V_r & U_s V_s \end{pmatrix}$。用第一行减去第二行的 $U_r U_s^{-1}$ 倍（并不会改变行列式），得到了矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ U_s V_r & U_s V_s \end{pmatrix}$，其行列式为

$\det(I_r) det(U_s V_s) = \det(U_s) det(V_s) \neq 0$。

我们已经找到了 $A+B$ 的一个 $(r+s) \times (r+s)$ 可逆子矩阵。因此我们就证明了 $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$，得证。

上面的证明我们利用了秩的定义，如何给出一个纯粹的矩阵理论的证明？利用已有的知识，我们得到了圆满的解答。

**例 11** 设 $A$、$B$ 分别是数域 $F$ 上的 $m \times n$ 矩阵，则 $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 成立当且仅当存在可逆矩阵 $P$、$Q$，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$PBQ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$，其中 $r = \text{rank}A$，$s = \text{rank}B$，$r + s \leqslant \min\{m, n\}$。

证明 必要性。设 $A$、$B$ 的满秩分解为：$A = A_1 A_2$、$B = B_1 B_2$，其中 $A_1 \in F^{m \times r}$，$A_2 \in F^{r \times n}$，

$B_1 \in F^{m \times s}$，$B_2 \in F^{s \times n}$，$A_1$、$B_1$ 为列满秩，$A_2$、$B_2$ 为行满秩。

因此我们得到 $A+B$ 有下列分解：

$$A + B = A_1 A_2 + B_1 B_2 = (A_1 \quad B_1) \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}。$$

取 $C_1 = (A_1 \quad B_1) \in F^{m \times (r+s)}$，$C_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \in F^{(r+s) \times n}$，又已经知道 $\text{rank}(A+B) = r+s$，且容易看到 $\text{rank}(A+B) \leqslant \text{rank}C_1$，$\text{rank}C_2 \leqslant r+s$，故 $\text{rank}C_1 = \text{rank}C_2 = r+s$，故而存在 $m$ 阶和 $n$ 阶可逆方阵 $P$、$Q$，使得 $PC_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$，$C_2 Q = \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & I_s \end{pmatrix}$，从而

$$P(A+B)Q = PC_1C_2Q = \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & I_s \end{pmatrix},$$

且 $PC_1 = P(A_1 \quad B_1) = (PA_1 \quad PB_1)$ ,$C_2Q = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A_2Q \\ B_2Q \end{pmatrix}$,

所以, $PA_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$,$PB_1 = \begin{pmatrix} O \\ I_s \end{pmatrix}$,$A_2Q = (I_r \quad O)$ ,$B_2Q = (O \quad I_s)$ ,

最后可得 $PAQ = PA_1A_2Q = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$,$PBQ = PB_1B_2Q = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$ ,必要性得证。

充分性。$PAQ + PBQ = P(A+B)Q = \begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & O & O \\ O & O & I_s \end{pmatrix}$,可得 $\mathrm{rank}(P(A+B)Q) = r+s$,又 $P$、$Q$ 均为可逆矩阵,故而 $P$、$Q$ 即为一些初等矩阵的乘积。而矩阵乘以初等矩阵并不改变矩阵的秩,所以 $\mathrm{rank}(A+B) = r+s = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$,充分性得证。

## 3　总结

在“高等代数”的教学过程中,教材上许多结论具有进一步讨论的空间,为老师们进行启发式教学提供了极大的思考空间,如艾森斯坦因判别法条件的改变、线性相关性部分中间的 Steinitz 替换定理的不同证明方法、Lagrange 插值公式在“高等代数”的不同部分中起到的作用等问题,都可以展开进行专题的探讨。本文主要对文献上熟知的几个矩阵秩不等式取等号的情况进行了深入的探讨,期望学生思想不疲、劲头不松,现在多学习,以后为解决国计民生中的诸如芯片设计生产制造等“卡脖子”问题作出有时代担当的贡献。

**参考文献:**

[1] 王萼芳,石生明.高等代数(第五版)[M].北京:高等教育出版社,2019.
[2] 杨子胥.高等代数习题解[M].济南:山东科学技术出版社,2002.
[3] 丘维声.高等代数学习指导书[M].北京:清华大学出版社,2017.
[4] 李炯生,查建国,王新茂.线性代数[M].合肥:中国科技大学出版社,2010.
[5] MARSAGLIA G,SSYAN G P H. Equalities and inequalities for ranks of matrices[J].Linear and Multilinear Algebra,1974(2):269-292.
[6] MARSAGLIA G.Bounds on the rank of the sum of matrices[J].In Trans. Fourth Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Academia,Prague;1967:455-462.
[7] MARSAGLIA G,StyanG P H. When does rank (A + B)= rank (A)+rank (B)? [J].C d. Math. Bull. 1972(15):451-452.

# Insight on the Several Matrix Rank Inequalities

FENG Lihua, HU Zhi, LIU Weijun, LI Chen, LU Lu
(School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract**: In the teaching of Higher Algebra, how to further enlighten students´divergent thinking, to complete some examples and exercises with a scientific and rigorous perspective, and to further explore the problems hidden in the questions is a problem worth pondering. Aiming at the matrix rank inequalities, this paper further discusses with students the necessary and sufficient conditions of the equality, which reveals the scientific thinking in the teaching process.

**Key words**: matrix; rank; inequality; equality

(责任校对　朱春花)