

高中数学教学中直观想象素养的培养

刘金旺,陈颖

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

摘要:《普通高中数学课程标准(2017年版)》及2020年修订版均强调要注重高中生数学核心素养的养成。直观想象素养作为数学六大核心素养之一,在数学教学活动中占有重要的地位。本研究以“直线与平面垂直的判定”的教学设计为例,提出情境问题驱动、教学方式变革、教学内容延伸三种直观想象素养的培养策略。

关键词:直观想象素养;教学活动;教学设计

中图分类号:G633.6

文献标志码:A

文章编号:1674-5884(2022)02-0001-05

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出,直观想象是借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用空间形式特别是图形理解和解决数学问题的一种素养^[1]。笔者精读新课标后对直观想象素养的内涵有了较深入的理解:几何直观是借助图形认识数学问题并将知识进行直观迁移,从而解决相应的问题;空间想象则是从生活情境出发,对几何图形进行加工、改造,从而创造新的图形。两者既有不同点也有共同点,我们应该侧重其相同点,在问题解决的过程中要处理好几何直观与空间想象的关系。直观偏具体,想象偏抽象,直观想象素养综合了具体与抽象。

在《普通高中数学课程标准(2017年版)》中,直观想象主要表现为以下四个方面:(1)建立数与形的联系;(2)借助几何图形描述问题;(3)借助几何直观理解问题;(4)运用空间想象认识事物^[1]。这四个方面没有简单、复杂的难易之分,也没有低级、高级的层次之分,它们是紧密相连的,但学生所能达到的水平是有差异的。新课标中将直观想象素养划分为三个水平:水平一,能够在熟悉的情境中抽象出实物的几何图形,建立数与形的联系;水平二,能够在关联的情境中想象出几何图形,并能借助图形解决实际问题或数学

问题;水平三,能够在综合的情境中利用图形,通过直观想象建立数学与其他学科的联系,形成解决问题的方法^[1]。

调查分析发现,近几年高考数学试卷中对直观想象素养的考查占比越来越大,进一步突显出直观想象素养在高中数学课程中的重要地位。学生直观想象素养的发展离不开直观的感知,在教学过程中利用现实情境问题驱动教学,可激发学生直观想象素养;结合现代信息技术的教学方式,能够将复杂问题直观化,学生在切身感受图形的变化过程中培养直观想象素养;教学内容的延伸,能够训练学生思维的延展性和综合性,为学生直观想象素养发展提供导向,进而提高学生直观想象素养。

1 情境问题驱动,激发学生直观想象素养

数学课堂中的情境引入已然是近几年的热点,成功的情境引入能够迅速吸引学生的注意力,牵动学生思维,让学生调整学习状态融入课堂学习;在学生不会解决又急于解决问题的心理之间制造一种悬念,激发其强烈的兴趣与求知欲。很多学生对直观想象的认识比较模糊、抽象,因此,在数学教学中要多利用现实情境问题驱动教学,

收稿日期:2021-09-28

基金项目:湖南省2019年普通高校教学改革研究项目(2019-291-478)

作者简介:刘金旺(1964—),男,湖南常德人,教授,博士,主要从事代数与符号计算研究。

激发学生直观想象素养。

创设现实生活情境能够让学生发现数学与生活的紧密联系,激发学生学习兴趣,让其了解数学来源于生活并应用于生活。教师在教学过程中可以通过一系列问题驱动让学生找到数与形之间的特征与关系、归纳类比出不同实例的共性与差异。学生经历数学中图形的抽象、图形的产生、图形的变换进而发现图形中复杂的数学本质。

例如在“直线与平面垂直的判定”这堂课的教学设计中,教师在PPT上展示天安门前的旗杆与地面、地下车库的立柱与地面、公路大桥的桥柱与水面位置关系的图片时,可请学生利用图形的直观性并充分发挥空间想象指明上述图片的位置关系,从而导入新课。这样的引入方式能帮助学生形象化地认识直线与平面的垂直关系、在学习新知之前脑海中就储存一些直线与平面垂直的图形信息,激发学生的直观想象素养。源于生活的实例,能够减少对新知的陌生感,更能触动学生心灵。也有教师从播放《日晷》视频引入教学,学生在体会中华文明源远流长的同时,亦可通过视频中直观的几何图形与关键词“盘面与赤道平行,指针与地轴同向”抽象出直线与平面垂直的位置关系。学生发挥空间想象动手制作日晷模型,从而导入新课。

在创设的情境中渗透数学史的相关内容,既可以扩大学生文化视野,又可以弘扬人文精神。与此同时,在课堂中训练学生动手操作能力对激发学生直观想象素养也是一种好方法。

2 教学方式变革,培养学生直观想象素养

当今社会俨然是一个大数据时代,各种数据与图形的处理方式已经逐步成熟,多媒体技术在数学课堂教学中使用的好处逐渐显现。因此,教师熟练掌握相关软件的操作方法,合理利用现代信息技术,充分挖掘信息技术在数学直观化教学中的作用,对学生直观想象素养的培养有着重大意义。在传统教学中教师只是单纯直白地讲授知识,学生需要根据老师的语言描述在头脑中构造出相应的教学情景,因此不具备直观性,而现代教学方式随着时代的变化不断变革。现代课堂教学中教师通过多媒体展示的直观图形可静可动,甚至借助静态图形进行动态变换,通过向学生展示图形的移动、折叠、翻转等变换,让学生在图形的

变换中发现数学美、找到解决问题的本质和思路。学生可在动静结合的背景下感知几何图形的性质特征和数学结论的本质特征,在这个过程中充分培养直观想象素养。

数学是一门探究空间形式与数量关系的学科,以“形”的直观寻找问题中的已知条件、隐藏条件和未知条件,通过多媒体中直观形象的图形去理解问题,运用空间想象去思考问题,从而找到解决问题的方法。例如在“直线与平面垂直的判定”这堂课的教学设计中,教师高效利用信息技术,采用翻转课堂式教学。课前先请学生观看几何画板中光源下旗杆影子变化的动画(如图1所示),让学生对直线与平面垂直提前有直观感知,再请学生结合对下述问题的思考,试着概括直线与平面垂直的定义。

(1)光源下,旗杆 AB 与它在平面上的影子 BC 所形成的角度是多少?

(2)随着光源的挪动,影子 BC 的位置也会挪动,旗杆 AB 与影子 BC 所形成的角度会随之变化吗?

(3)旗杆 AB 与平面上任何一条不过 B 点的直线 $B'C'$ 的位置关系是怎样的呢?

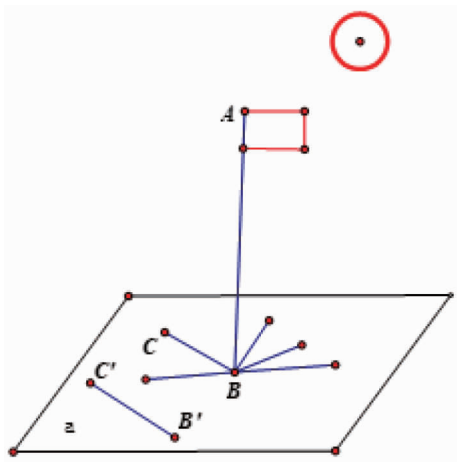


图1 光源下旗杆影子变化示意图

在课前安排学生观看教师的视频讲解,既节省了课堂教学时间,又培养了学生的自学能力。教师利用现代教学软件几何画板直观的动画展示,帮助学生发现旗杆 AB 所在的直线与平面上任何一条过 B 点或不过 B 点的直线都垂直,学生可从中理解直线与平面垂直定义的实质,尝试概括直线与平面垂直的定义。课堂上,教师在学生概括的基础上得出直线与平面垂直的精确定义:

如果直线 L 与平面 α 内的任意一条直线都垂直,则称直线 L 与平面 α 互相垂直,记作 $L \perp \alpha$ 。直线 L 叫做平面 α 的垂线,平面 α 叫做直线 L 的垂面,直线与平面垂直时,它们唯一的公共点 P 叫做垂足^[2](如图2所示)。

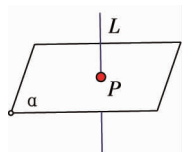


图2 直线与平面垂直的定义示意图

教学方式的变革不仅体现在现代信息技术在课堂中的运用,还体现在教师与学生的角色互换。传统的课堂中教师占主体地位,主要采用的是讲授法,学生被动接受知识;而现代课堂中学生占主体地位,教师发挥主导作用,多种教学方式齐头并进,学生主动探索知识。例如在“直线与平面垂直的判定”这节课的教学设计中,教师提出了一个问题:“除了用定义法判断线面垂直,还有没有其他的方法呢?”定义法确实可以作为判断命题是否成立的依据,这种判定方法虽然在理论上是可行的,但是在实际检验的过程中是有难度的。因此,找到一种比定义法更简单、操作性更强的判定方法就显得尤为重要。为了获得最直接的经验,学生亲手操作,更直观地感受图形的变化,这充分体现了学生的主体地位,也充分证实了王道俊先生提出的“主体学习的核心是学生能动的、创造性的学习活动”这一观点^[3]。教师以数学活动的形式推动教学能激发学生学习的兴趣与积极性。《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出了“四基”,数学基本活动经验是其中之一。它是指学生通过亲身经历数学活动过程所获得的具有个性特征的经验。这种活动经验不仅仅指获得解题的经验,更重要的是在多样化的数学活动中去思考、探索、发现数学结论及其本质,在数学活动中充分培养学生直观想象素养。因而教师设计了一个折纸活动:学生分组合作完成一个折纸实验,首先剪出一个三角形纸片 abc ,之后经过顶点 a 将纸片翻折,得到折痕 ad (如图3所示),然后将翻折后的纸片竖直放置在桌面 α 上(如图4所示)。最后请每个小组代表依据本组折纸活动的情况,观察折痕 ad 所在的直线 L 与桌面所在的平面 α 是否垂直,并说明理由。

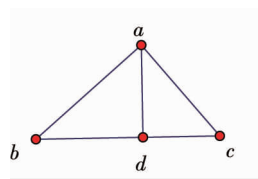


图3 三角形纸片折叠示意图

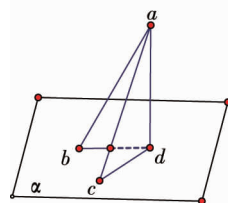


图4 三角形纸片翻折后示意图

由于每个小组的情况不一致,教师将课堂交给学生,让他们各抒己见。有的小组观察到直线与平面是不垂直的,从图形的直观中可以“看”出 ad 所在的直线 L 明显不与 bd, cd 垂直。学生通过列举反例来解释定义,亲自经历“看”出相关数学结论的过程,在数学学习中是非常重要的,这能使学生对结论的理解更深刻,记忆更牢固,运用更灵活。著名学者米秀旭、崔绪春指出,并不是所有的数学定理都需要经过严格的推理论证,鼓励学生大胆猜想假设,重要的数学结论往往都是“看”出来的,“看”出来的前提是我们直观想象素养水平比较高^[4]。而有的小组通过自己动手实验观察到折痕 ad 所在的直线 L 与桌面所在的平面 α 是垂直的,进一步得出 ad 所在直线与桌面所在平面 α 垂直的充要条件是折痕 ad 是 bc 边上的高。由于翻折后垂直关系不变,所以直线 ad 与平面 α 内的两条相交直线 bd, dc 都垂直。

小组内学生动手操作,交流讨论,大胆猜想假设,在变化的图形中发现不变的规律,通过进一步探索发现,无论是将三角形在桌面 α 上平移或绕折痕 ad 转动,都能得到折痕 ad 与桌面 α 垂直的结论。因此,学生在教师的引导下总结出直线与平面垂直的判定定理:一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直,那么该直线与此平面垂直^[2]。学生探讨结束后,教师用几何画板进行动画演示,验证学生所得结论。由此可见,几何画板在数学教学过程中所起的作用十分巨大,正如徐飞雷、吴磊所言,几何画板在数学直观化教学及对学生几何直观与空间想象素养的培养方面有着重大的意义,因而教师可以合理地使用几何画板,解

决相关问题^[5]。在折纸活动中,学生通过观察、操作、猜想、验证、分析、提出问题并解决问题,在探究中总结出直线与平面垂直的判定定理,充分培养了直观想象素养。

3 教学内容延伸,提高学生直观想象素养

3.1 内容的延伸

教学内容是教师进行教学的任务与参考,教师需要通过教学内容中的数学概念,引导学生形成对知识的认知。在实际的课堂教学中,学生思考、探究数学问题的角度不同,知识水平层次存在差异,他们能联想到的知识也会有很大的区别,就会产生很多暂时无法解答的疑问。因此,在课堂中教师需要对教学内容进行不同程度的延伸,以此来解决学生的种种疑问,同时也能锻炼学生的思维能力,完善学生的知识体系,提高学生的直观想象素养。

例如在“直线与平面垂直的判定”这堂课的教学设计中,学生已有的认知是“在平面上,过一点垂直于已知直线的直线有且只有一条”。类比这个结论,学生会思索在空间中,过一点垂直于已知平面的直线有几条呢?学生能有此疑问,说明其学会了系统的思考问题,体会到了平面与空间的联系与区别。为了解决学生的疑问,教师可引领学生进行必要的推理证明,即使很直观的结论,也要设计相应的教学环节,让学生体会到直观想象的合理要用逻辑推理的严谨去验证。由于直接证明这个结论较为困难,教师引导学生采用反证法证明:假设过点 P 有两条直线 m, n 垂直于同一平面 α , 设直线 m, n 确定的平面为 β , 且 $\alpha \cap \beta = l$, 所以 $l \subset \alpha$ 。由线面垂直的定义,知 $m \perp l, n \perp l$, 这与“在同一个平面中,过一点有且只有一条直线垂直于已知直线”相矛盾。所以,在空间中,过一点垂直于已知平面的直线有且只有一条。学生依据上述证明过程发挥自己的空间想象能力并尝试从几何角度来解释此证明过程;教师利用几何画板将图形直观展示(如图5、图6所示)。

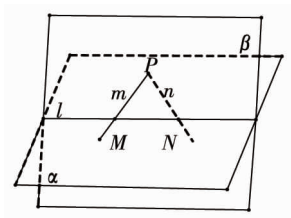


图5 点不在交线的示意图

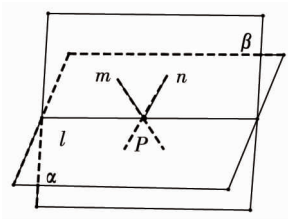


图6 点在交线的示意图

至此,教师再顺势给出垂线段的定义,指出棱锥的高就是棱锥的顶点到底面的距离,学生理解起来就没有困难了。这也为之后棱台体积公式的推导、平面与平面垂直的性质定理做好了充足的知识储备。

3.2 解题方法的延伸

数学的魅力在于知识是相互连贯的,譬如习题的解决方法,一道题目可以从数学多个角度进行解决,当然也可以从多道题目中发现其所蕴含的数学本质是一致的,即可采取同样的解题方法,这就是常说的一题多解和多题一解。如果就题讲题,不仅对学生知识学习的宽度和深度都没有延伸,而且对学生直观想象能力的提升作用也非常小。因而教师需要钻研教材教法,关注数与数、数与形之间的紧密联系,从不同角度去探究解题方法,从多维度去拓展变式,在教学中不断锻炼学生不同的思维能力,这样就在解题方法拓展的过程中提升了学生的直观想象素养。

例如在“直线与平面垂直的判定”这堂课的教学设计中,对于教材中例题“如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面,那么另一条直线也垂直于这个平面”的证明,除了教科书上利用直线与平面垂直的判定定理此种证明方法,教师还可以启发学生利用直线与平面垂直的定义进行证明,实现一题多解。定义是解决问题的根源,因而在数学上用定义法解决问题意义重大,教师需向学生强调定义法的重要地位,并引导学生提炼出解决直线与平面垂直问题的方法有判定定理与定义法。教材例题是对直线与平面垂直判定定理的简单运用,在此基础上,教师引入学生熟悉的、掌握较好的几何体模型(正方体,长方体等)补充一道证明线面垂直的例题。以此例题来帮助学生在直观图形中进一步理解定理的实质,体会将线面垂直转化为线线垂直的重要性。教师还需在补充的例题上进行变式训练,变式题则以学生

平时接触较少的几何体(直四棱柱,四棱锥等)为载体研究直线与直线垂直的证明方法。变式题既锻炼了学生的空间想象能力,又教会学生如何从线线垂直出发,逐步将问题转化为线面垂直进行证明,进而在问题转化过程中进一步理解直线与平面垂直的定义及其判定定理的本质。教师需一步步引导学生发现变式题的解题方法与例题一致,实现多题一解。

4 结语

《普通高中数学课程标准(2017年版)》及《普通高中数学课程标准(2020年修订版)》都凸显了直观想象素养的重要性,而直观想象素养的激发、培养与提高都需要通过课堂教学来实现。在高中数学教学中,应结合现实生活情境,渗透数学文化,调动学生积极性,从而激发学生直观想象素养;应借助现代教学技术,贯彻

现代教学方式,以学生为主体,在数学活动中培养学生直观想象素养;应适当延伸教学内容,拓展解题方法,完善学生知识体系,锻炼学生思维能力,从而提高学生直观想象素养,为学生终身发展奠定坚实的基础。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京:人民教育出版社,2018.
- [2] 课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心. 数学必修第二册[M]. 北京:人民教育出版社,2019.
- [3] 王道俊. 关于教育的主体性问题[J]. 教育研究与实验,1996(2):1-5.
- [4] 米秀旭,崔绪春. 山重水复直观现 柳暗花明想象来——数学核心素养之直观想象培养剖析[J]. 中学数学教学参考,2018(10):57-60.
- [5] 徐飞雷,吴磊. 借助“几何画板”提升直观想象[J]. 中学数学教学参考,2019(8):19-20.

Cultivation of Intuitive Imagination Literacy in Mathematics Teaching in Senior High Schools

LIU Jinwang, CHEN Ying

(School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: Ordinary High School Mathematics Curriculum Standard (2017 Edition) and the 2020 revised edition both emphasize the cultivation of senior high school students' mathematics core literacy. Intuitive imagination literacy, as one of the six core qualities of mathematics, plays an important role in mathematics teaching activities. Taking the teaching design of "determination of vertical line and plane" as an example, this paper puts forward three kinds of cultivation strategies of intuitive imagination literacy: situational problem-drivenness, teaching method reform, and teaching content extension.

Keywords: intuitive imagination literacy; teaching activity; teaching design

(责任校对 朱正余)