

doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2020.03.006

# 数学探究式教学案例探析

——以任意角的三角函数为例

陈静

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

**摘要:**数学探究是普通高中《数学课程标准》<sup>[1]</sup>中的一项重要内容。它是一种新的学习方式,这种方式能很好地发展学生对数学概念的理解能力和对数学问题的解决能力,使得学生始终处于一种自主学习、积极思维、能动实践的状态中。任意角的三角函数概念的讲授采用自主探究的方式,其教法与学法均是适宜的。本教学案例从摩天轮旋转实例引入,建立数学模型,得出角的正弦值,然后将角放到直角坐标系中来探究三角函数值,延伸出数学史教育。整个教学流程突出了学生主体,教师主导作用的发挥,让学生学习乐在其中。

**关键词:**数学探究;单位圆;任意角三角函数概念;周期现象

**中图分类号:**G633.6      **文献标志码:**A      **文章编号:**1674-5884(2020)03-0028-04

## 1 背景信息

三角函数是重要的基本初等函数之一,它既是研究三角形特性的一种基本的数学工具,也是描述周期性现象的一种重要数学模型,在数学、物理等学科中有较高的地位。本案例节选自人教版普通高中课程标准实验教科书《数学》必修4<sup>[2]</sup>,第1.2.1节,“任意角的三角函数”。本节共安排2课时,本案例所授课是第1课时,课时45 min。占高中函数重要地位的三角函数与其他知识联系密切(如三角函数与几何图形相结合,不易理解),无论是从平时教学还是高考,该知识点的学习都存在较大难度。数学师范生通过观摩三角函数的教学,可以学习老教师在教学过程中是怎样化解难点、突出重点的,从而能快速提升教学能力。

由于在初中学习了锐角三角函数的概念,已经知道它们是以锐角为自变量,以此值为函数值的函数。结合锐角三角函数与几何法可直接解直角三角形,而不需建立直角坐标系。当前任意角三角函数的教学现状多数是借助任意角三角函数

的概念与锐角三角函数的因袭与延伸关系,以锐角三角函数为先导引入,而后由特殊过渡到一般,引导学生参与任意角三角函数的定义过程<sup>[3-5]</sup>。本案例所授内容是三角函数这一章中最重要的一节内容,主要是通过问题引导学生自主发现任意角三角函数的生成过程,从而很好地体验三角函数概念的产生与发展,理解三角函数的定义,以及领悟直角坐标系的工具功能,丰富数形结合的实践经验。

数学自主探究是指发现或提出数学问题并进行观察分析,采用合适的方法运用有关数学结论及规律,对问题做出解答或证明。自主、合作、探究的教学方法应用在本次任意角三角函数概念的讲授中,可有效地发展学生面对问题时的创新意识和实践能力<sup>[6]</sup>。

## 2 案例正文

三角函数是高中阶段遇到的较为复杂的函数,无论它的定义,还是它的图像、性质等都比较复杂。在高考中几乎每一年都要考察三角函数的

收稿日期:20191120

基金项目:湖南省普通高校教学改革研究项目(2019-478)

作者简介:陈静(1980-),女,湖南湘潭人,副教授,博士,主要从事微分方程及其应用研究。

相关知识。作为学习整个三角函数知识的基础内容,数学师范生熟练掌握任意角三角函数的教法及学生的学法,对师范生的教学能力的提高有极大的帮助。

## 2.1 任意角三角函数课堂教学片段实录

### 2.1.1 创设情境,建立模型

某市游乐场计划新建一座摩天轮,设摩天轮的转轮半径为 $r$ ,转轮的中心离地面高度为 $h_0$ ,如图1所示。摩天轮沿逆时针方向转动,匀速转动一圈需6 min,若游客从 $D$ 点进入座舱,求游客离地面的高度 $h$ 与转动时间 $t$ 的函数关系。

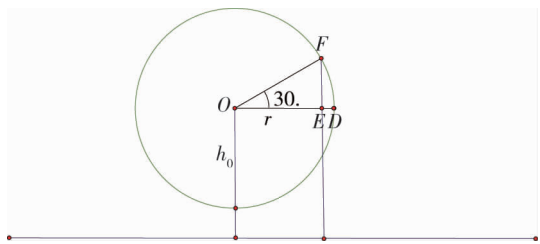


图1 摩天轮转动模型

师:我们先来假设这样一种情况,例如乘坐过后30秒,此时距离地面的高度怎么表示?

生:匀速转动一圈需6 min = 360 s,30 s后则形成的夹角为 $30^\circ$ ,那么离地面高度为 $h = h_0 + r\sin 30^\circ = h_0 + EF$ 。

师:再设想另外几种情况,60 s呢?

生: $h = h_0 + r\sin 60^\circ$ 。

师:90 s呢?

生: $h = h_0 + r\sin 90^\circ$ 。

师:一般地,过了 $ts$ 呢?我们猜想一下...

生: $h = h_0 + r\sin t^\circ$ 。

师:这样的猜想是合情的,是否有理论依据呢?

分析:由特殊到一般,从几个特殊情形开始考虑,再给出猜想的一般性结论,最后论证该结论的正确性。

总结:乘坐时人离地面的高度可由式子 $h = h_0 + EF$ 来表示,其中 $h_0$ 是定量, $EF$ 为转轮上 $F$ 点到初始水平位置 $OD$ 的距离,是变量。在运动过程中动点 $F$ 和初始点 $D$ 分别与圆心 $O$ 形成连线并得到变化的夹角 $\angle FOD$ ,通过分析该夹角的大小,并结合锐角三角函数,得出高度 $h$ 与时间 $t$ 之间的函数关系。

师:对任意角 $\angle FOD$ ,怎么定义 $\sin \angle FOD$ ?

在转动后时间为 $ts$ 时,人到地面的距离为 $h = h_0 \pm EF$ ,对比我们的猜想: $h = h_0 + r\sin t^\circ$ ,我们的愿望是两者是和谐统一的,因此 $h = h_0 \pm EF = h_0$

$+ r\sin t^\circ$ ,这时会有什么发生?

生:由于两式相等, $h_0$ 为相同量,因此 $r\sin t^\circ = \pm EF$ 。

师:对,必须有 $r\sin t^\circ = \pm EF$ ,即 $\sin t^\circ = \pm EF/r$ 。

总结:夹角 $\angle FOD$ 的大小随着 $F$ 在圆周上匀速运动而变化,由于点 $O$ 与点 $D$ 是确定的,即有任意角 $\angle FOD$ 对应着唯一的点 $F$ ,进而对应着唯一的 $EF$ ,于是 $\sin \angle FOD = \pm EF/r$ ,我们把这个式子称为式①。

师:式①何时取正负值?

生:与其初始位置对比, $OD$ 上方为正, $OD$ 下方为负。

师:由于 $r$ 是大于0的,观察式①的特点可知,比值取正负即分子取正负,大家想一想,我们用怎样的一个量来替代 $EF$ 或 $-EF$ ,可以使式①的表示既简洁又统一呢?

生:可以建立直角坐标系,用点 $F$ 的纵坐标来表示 $EF$ 或 $-EF$ 。

师:那以此方法为导向,让我们一起来探究三角函数的定义吧!

下面是知识拓展环节,一起来探究周期现象。

“离离原上草,一岁一枯荣。野火烧不尽,春风吹又生”(王安石诗作《赋得古原草送别》)。这首诗描绘的是自然界中遵循一定规律的周而复始的现象,这种现象被称之为周期现象。我们常用各种数学模型来描述生活中的实际问题,例如,在描述人口增长,银行利率,细胞分裂等增长率问题时,我们使用的是指数函数模型;在解决利润最大或用料最省的问题中,常用的是二次函数模型;在描绘地震的震幅变化时,常用的是对数函数模型。用怎样的数学模型来描述周期现象呢?周期现象一般伴随有周期运动,摩天轮的旋转运动就是一种周期运动。那么 $\sin \angle FOD$ 的变化情况如何呢?

### 2.1.2 根据模型,推出定义

以 $\angle FOD$ 为例,请分析以下规定是否合理。

1) 设 $\angle FOD = \alpha$ ;

2) 在建立的直角坐标系中标出角 $\alpha$ ;

3) 以原点为圆心,半径为 $r$ 作圆;

角 $\alpha$ 的终边与圆相交于点 $F$ , $F$ 点的坐标为 $(x,y)$ ;

4) 规定: $\sin \alpha = y/r$ 。

师:当 $\alpha$ 为锐角时,以上规定与初中所学的三角函数的定义相矛盾吗?

生:不矛盾,而且,在直角坐标中角的大小可

随意控制。

师:圆的半径  $r$  大小有限制吗?

生:由相似三角形的性质,对于同一个角  $\alpha$ ,无论其终边位置如何变化,这两边的比值是一定的,因此圆半径  $r$  的长度没有限定。

师:要使运算更为简便,半径  $r$  该如何设定?

生:可以考虑取  $r = 1$ 。

师:很好!我们称圆心为原点,半径为单位长度 1 的圆为单位圆。单位圆可帮助我们更为简洁地表示我们前面的规定。

此时,导出任意角的三角函数定义就非常自然了。设  $\alpha$  是一个任意角,它的终边与单位圆交于点  $F(x,y)$ ,如图 2 所示,那么,

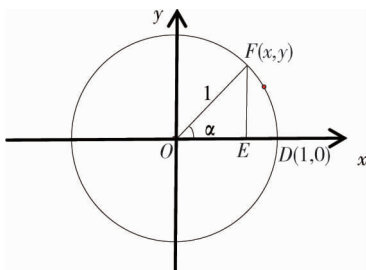


图 2 直角坐标系下摩天轮转动模型

$y$  叫作  $\alpha$  的正弦,记作  $\sin\alpha$ ,即  $\sin\alpha = y$ ;

$x$  叫作  $\alpha$  的余弦,记作  $\cos\alpha$ ,即  $\cos\alpha = x$ ;

$y/x$  叫作  $\alpha$  的正切,记作  $\tan\alpha$ ,即  $\tan\alpha = y/x$ ,  
 $x \neq 0$ ;

我们将上述正弦、余弦、正切函数统称为三角函数。通过观察我们发现这类函数的特点是:自变量都为角,函数值为角的终边与单位圆的交点的坐标或坐标的比值。要使比值有意义就要注意角的取值,我们称使比值有意义的角的集合为三角函数的定义域。

最后,布置以下课堂思考题。

思考题 1:分析说明正弦、余弦、正切三角函数的周期特性。

思考题 2:利用三角函数定义在单位圆中,如图 3,求证:  $\sin x < x < \tan x$ ,  $x$  为锐角。

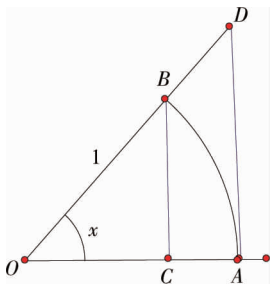


图 3 思考题 2

### 2.1.3 定义得出,纪念欧拉

三角函数的定义可谓“看似平凡最崎岖,成如容易却艰辛”(王安石《题张司业诗》)。从三角函数的发展历史来看,三角学兴起于天文观测,是由古希腊数学家希帕霍斯为了定量地解决天体的位置问题而发明的。早期的三角知识主要用于了解和认识天文现象和规律,与圆等几何图形有不可分割的联系。直到十三世纪三角学才正式脱离了天文学的范畴,成为一个独立的数学分支<sup>[6]</sup>。在十八世纪以前,人们对三角函数的研究都是在三角形内或是一个半径不定的圆内进行的,这虽然发展了三角函数的应用,但使用起来是不方便的。欧拉是研究三角学最杰出的数学家,是他提出单位圆的概念,且定义三角函数为相应的线段与圆半径 1 的比值。教材中对三角函数的定义与欧拉的定义是一致的。欧拉巧妙地结合直角坐标系和单位圆来定义三角函数,彻底地解决了角在不同象限中时三角函数值的符号问题,由此使得三角函数成为“最具有表现力的函数”,用于研究现实世界中的周期现象。

欧拉(1707-1783 年)是瑞士著名的数学家和物理学家,代表作有《微分学原理》《积分学原理》《无穷分析引论》等。1765~1771 年他用双眼直接观察太阳,双眼先后失明。欧拉一生奉献于科学研究,留下了丰富的著作,是世界公认的伟大数学家,同学们应以他为学习楷模。

### 2.2 任意角三角函数教学片段赏析

在任意角三角函数的概念教学中,采用的是创设情境的导入方式,该情境来自生活中一实际问题,对问题建立相应的数学模型,这与教材上开门见山的引入是不同的。锐角三角函数的概念是建立在直角三角形基础上的,其重点不是对函数本质的认识,而在于利用直角三角形中边与角的关系来解直角三角形。本案例的教学不以锐角三角函数的概念为起点,而是向学生渗透数学建模的思想,体现“函数是描述客观世界变化规律的数学模型”,引导学生积极参与模型的建立过程,观察圆心在原点上时,圆周上的点的坐标随角的变化而变化,让学生直观了解到“对任意给定的一个角,圆周上就有唯一的一个点与之对应”。抓住函数的定义,使学生能认清变量之间的对应关系,了解函数定义域和值域的范围,对三角函数的本质特征有更充分的认识和理解。

本案例调动任意角的角度制、弧度制以及锐角三角函数等储备知识,借以上实例的探究来打破原有知识结构的平衡,从而感受到学习新知识

的必要性——角的范围扩大了,情况更为一般了,这种情境的变迁自然地致使学生去思考锐角三角函数应“与时俱进”的问题。这种让学生做学习过程中的主人,把定义的主动权交给学生,引导学生参与定义过程,启发学生的创新思维,是数学探究过程中的基本现象。

### 2.3 数学探究有效方式在本案例中的启示

1) 初中学习了锐角三角函数的概念,知道函数的自变量为锐角,函数值为直角三角形中各边的比值,若将锐角扩展到任意角,该课题具有一定的开放性,故可选择自主探究式教学方式来学习本知识。

2) 创设情境,建立模型是讲授任意角三角函数的一种数学思想和方法。从实际情境——提出问题——数学模型——数学结果——检验结果,这一过程就是一种很好的自主探究过程。

3) 教师应努力成为数学探究课题的创造者、组织者、指导者、合作者,学生应成为学习者、实践者、发现者。因此数学师范生的培养与职后的培训,均应始终坚持这一理念,同时不断求新务实。

4) 教师应根据学生的差异特点提供有针对性的指导,即“有指导的再创造”<sup>[6]</sup>。创造轻松愉悦的学习氛围,培养学生的发散性思维,鼓励一部分同学在模仿的基础上发挥自己的想象力和创造性。

## 3 案例思考题

1) 运用同课异构思维,至少用两种方式设计

任意角的三角函数定义的讲授。

2) 怎样理解数学探究教学? 教学实践中科学地探究应遵循哪些原则?

## 4 案例使用说明

1) 适用范围:大三师范生的试教与见习;高中数学教师。

2) 教学目的:通过讲任意角三角函数的定义,学会自主探究教学方式;掌握数学探究,有助教学水平提升。

3) 教学建议:采用课件、视频或现场授课的方式均可。时间 45 min。针对课题,可设若干小组设计教案,自主比较方案,科学选定教案。

### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[S].北京:2017.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中课程标准实验教科书数学4必修A版[M].北京:人民教育出版社,2007.
- [3] 曹群.“任意角的三角函数”教学设计[J].数学学习与研究,2018(14):46-47.
- [4] 王佩,赵思林,曾心鹤.“单位圆定义法”与“终边定义法”的有机融合——以3节“任意角的三角函数”课堂实录为例[J].中学教研(数学),2018(6):23-27.
- [5] 徐亚婷.基于数学史的“任意角的三角函数”概念教学设计研究[D].徐州:江苏师范大学,2018.
- [6] 王立军.新课程数学教学设计应树立的五种意识[J].教学与管理,2007(1):63-65.

## Case Study on Fun in Mathematical Inquiry Learning: Taking Trigonometric Function as an Example

CHEN Jing

(School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** Mathematical inquiry learning is an important content in *Mathematics Curriculum Standard* for senior high school. It is a new way of learning, which can help develop students' ability to understand mathematical concepts and solve mathematical problems, so that students are always in a state of self-studying, positive thinking and active practicing. Both the teaching method and the learning method are suitable for students when applying the inquiry learning in teaching trigonometric function. Taking the rotation of the Ferris wheel as an example, the teaching case establishes the mathematical model to calculate the sine calculator of a certain angle, and then puts the angle into the rectangular coordinate system to explore the trigonometric function value, which finally extends the education of the history of mathematics. The entire teaching process is featured by students-centered and teachers-leading, aiming to help students enjoy the study.

**Key words:** mathematical inquiry learning; unit circle; the concept of trigonometric function; periodic phenomenon

(责任校对 刘兰霞)