doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2019.02.007

基于多元表征理论的数学教学设计

——以“函数的概念”教学为例

李冬梅,刘瑶

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:基于多元表征理论的数学教学是利用丰富的外在表征凸显数学对象的各方面属性,完善其结构刻画,增强其吸引力和趣味性。以“函数的概念”为例,探讨多元表征理论在教学设计中的应用,利用函数的不同表征之间的转换来引导学生认识发展函数概念的必要性,经历概念的形成过程,抓住概念的本质,以此帮助学生更好地理解函数的概念,进一步发现学习的乐趣。

关键词:多元表征;教学设计;函数概念

中图分类号:G63　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1674-5884(2019)02-0038-04

在认知科学、教育心理学等领域中,“表征”的含义是指把一种事、物、想法或知识用某一种物理的或心理的形式重新表示出来。事物的“多元表征”则是指同一事物的不同表征形式[1]。数学多元表征可分为多元内在表征和多元外在表征。内在表征具有主观性,是学习者内化外在表征的结果,受学生已有知识和经验的影响,其多元性表现为认知结构中有关学习对象的不同成分。外在表征具有客观性,是数学学习对象的外在表现形式,其多元性表现为语言、文字、符号、图像、具体物、实际情境等[2-3]。基于多元表征理论的教学设计,可以利用丰富的外在表征凸显数学对象的各方面属性,完善数学的整体结构和意义,增强数学的吸引力和趣味性。本文将多元表征理论应用于函数的概念教学设计中,通过函数概念不同外在表征之间的转换,帮助学生建立较清晰的内在表征,达到对该概念的准确理解。

1　课例“函数的概念”的背景及设计思路

目前,初、高中数学课程中都介绍了函数的概念,初中用变量之间的依赖关系来刻画函数的概念,高中则用集合语言和对应关系来刻画。高中“对应说”函数概念相比初中“变量说”函数概念更精确、更严谨,它强调了函数的本质——对应关系。但学生在学习过程中可能存在以下难点:(1)受初中“变量说”函数概念的影响,学生难以体会高中函数概念学习的必要性;(2)$f(x)$的数学形式表达太抽象,高一学生难以将它和具体内容联系起来理解;(3)函数概念是用静态的对象去实现对动态变化过程的刻画,这需要学生突破形式逻辑思维、利用辩证思维才能较好的理解。所以,理解“对应说”函数概念有一定难度但至关重要。我们结合多元表征理论和教学实践设计教学环节,让学生经历函数概念不同表征之间的转换,帮助学生抓住概念的关键属性,体会概念的本质,理解函数是对现实生活中事物运动与变化现象的刻画,让学生感受到生活中处处是“函数”。

收稿日期:20181020

基金项目:国家自然科学基金项目面上项目(11871207);湖南省自然科学基金项目面上项目(2017JJ3084);2018 年湖南科技大学教学改革研究项目(907-G301816)

作者简介:李冬梅(1979-),女,湖南邵阳人,副教授,博士,主要从事代数与符号计算研究。

2　函数概念的多元外在表征分析

函数概念的外在表征主要分为具体表征和定义表征。具体表征通过具体函数表现,一般包括解析式表征、图像表征、图表表征和集合表征。定义表征通常是抽象的函数概念定义,一般包括语言表征、文字表征及符号表征。具体表征与定义表征的关系如图 1 所示[4-5]。

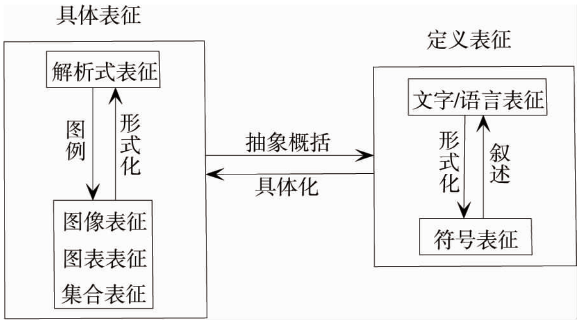

图 1　具体表征与定义表征关系图

3　课例“函数的概念”的设计过程及依据

3.1　创设情境,形成概念

3.1.1　图像表征与解析式表征的转换

情境 1　一枚炮弹发射后经过 26 s 落到地面击中目标,射高为 845 m,且炮弹距地面的高度 h(单位:m)随时间 t(单位:s)变化的规律如图 2 所示,请写出 h 与 t 的关系式。

首先,学生观察图 2,联系已学的二次函数图像判断高度 h 是否为时间 t 的函数。

接着,学生根据题目要求写出函数解析式 $h=130t-5t^2(0<t<26)$。

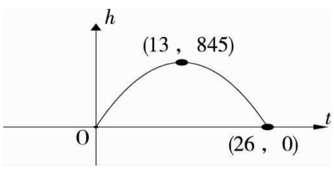

图 2　变量 h 与变量 t 的关系图

最后,让学生举出一些其它函数的例子并说明它是函数的理由,回顾初中“变量说”函数的概念:一般地,在一个运动变化过程中,如果有两个变量 x 和 y,并且对于 x 的每一个确定的值,y 都有唯一确定的值与其对应,那么 y 是 x 的函数。

此环节为实现图像表征与解析式表征的转换。一方面,能培养学生“数形结合”的意识;另一方面,直观体现了函数自变量和因变量的取值范围,有利于学生学会用集合语言和对应关系来刻画函数的概念。

3.1.2　图像表征与语言表征的转换

请学生观察以下情境,根据初中所学函数的概念,判断每个情境的变量之间是否存在函数关系并说明理由。

情境 2　近几十年来,因为大气层中的臭氧迅速减少,导致臭氧层出现了空洞。图 3 给出了南极上空臭氧层空洞面积从 1979~2001 年的变化情况。问臭氧层空洞面积 S 是时间 t 的函数吗?为什么?

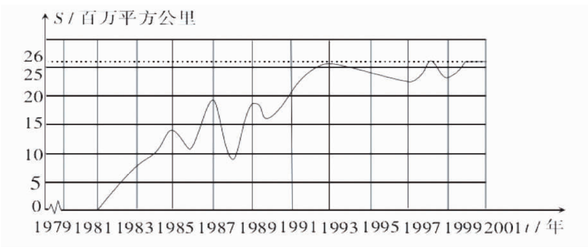

图 3　南极上空臭氧层空洞面积变化情况图

情境 3　国际上常用恩格尔系数(恩格尔系数 =食物支出金额/总支出金额)反映一个国家人民生活质量的高低(恩格尔系数越低,生活质量越高),表 1 是我国城镇居民 2008~2017 年恩格尔系数的变化情况。问恩格尔系数是时间的函数吗?为什么?

这两个情境是贴近于生活实际的典型事例,既体现函数来源于生活,同时也表明函数不仅是解析式,还可以是图像和图表。学生说明判断依据——把图像(或图表)表征转换为语言表征的过程可加深对概念本质的理解,为引出“对应说”函数的概念做准备。

表 1　我国城镇居民恩格尔系数变化情况表

时间/年	恩格尔系数/%	时间/年	恩格尔系数/%
2008	37.9	2013	35.0
2009	36.5	2014	34.2
2010	35.7	2015	34.8
2011	36.3	2016	29.3
2012	36.2	2017	28.6

3.1.3　语言表征与符号表征的转换

结合上述 3 个情境,提出下面几个问题,希望这些问题能激活学生思维,学生能在解决问题的过程中一步一步抽象概括出函数的概念。

问题 1:以上 3 个情境的相同点是什么?不同点是什么?

问题 1.1:3 个情境中的变量是否都有一定的

变化范围？请用集合的语言说明。

问题 1.2：每一个情境中，一个变量是根据什么对应到另一个变量的？

问题 2：假设两个变量分别为 x，y，情境中的图 3 和表 1，无法像解析式那样用 x 表示出 y，你能找出一种一般的方法用 x 表示出 y，实现统一和谐之美吗？

问题 3：请一名同学试用集合语言和对应关系重新描述函数的概念。

问题 1 对学生来说可能存在难度，教师可先提出问题 1.1 和问题 1.2 帮助学生寻找解题方向，再以情境 1 为例，分析说明它涉及两个数集，由时间 t 组成的数集 A 和由炮弹距地面的高度 h 组成的数集 B，每一个时间 t 可根据函数解析式 $h=130t-5t^2$ 对应找到高度 h。最终引导学生总结得出以下结论：3 个情境的相同点是都有两个非空数集，对于数集 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个值，按某种对应关系，在数集 $\boldsymbol{B}$ 中都能找到一个唯一确定的值与之对应；不同点是 3 个情境分别用解析式、图像、图表刻画了变量之间的对应关系。

问题 2 为引入数学符号表示对应关系而制造认知冲突，激发学生的探究欲望。我们借此向学生介绍 18 世纪莱布尼兹将 y 换成符号 f(x)，即 y=f(x)，实现了利用 x 表示出变量 y，其中的 f 为对应关系，它可以是解析式、图像或是图表。

通过对以上问题的探讨，学生较好地完成了“对应说”函数概念的语言表征，建立了对应关系的符号表征，问题 3 也就迎刃而解了，由此得到函数的概念：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 $\boldsymbol{A}$ 中的任意一个数 x，在集合 $\boldsymbol{B}$ 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ 为从集合 $\boldsymbol{A}$ 到集合 $\boldsymbol{B}$ 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in\boldsymbol{A}$。其中，x 为自变量，x 的取值范围 A 为函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值为函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in\boldsymbol{A}\}$ 为函数的值域。

此环节让学生经历了观察、分析、比较、概括的全过程，得到用集合语言和对应关系刻画的函数的概念。

3.2　多元表征，精细概念

为了让学生更好地掌握函数的概念并理解其关键属性：(1)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是非空数集；(2)概念强调数从“任意”到“唯一”的对应(即只允许“一一对应”和“多对一”)；(3)符号 f 表示对应关系；(4)函数概念的三要素分别为定义域、值域和对应关系，我们把函数概念的定义表征与具体表征联系起来，让学生经历对函数概念正例与反例的辨析，在发现问题症结的过程中，使头脑中概念的关键属性变得更清晰，以此深化对概念的认识。

首先，让学生判断 $y=10$ 是否为函数，借助常数函数的解析式表征扩大并改组学生原有的认知结构，让学生感受初中与高中课本中函数概念的区别，体会发展函数概念的必要性。

其次，判断 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ 是否为函数，利用函数概念的解析式表征明晰构成函数的三要素，让学生加强对函数定义域的关注。

再次，判断图 4、图 5 中的对应是否为函数并说明理由，利用函数概念的集合表征探讨函数值域与集合 $\boldsymbol{B}$ 的关系，具体化函数概念的关键属性。

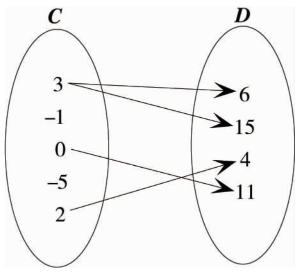

图 4　集合 $\boldsymbol{C}$ 与集合 $\boldsymbol{D}$ 中元素关系图

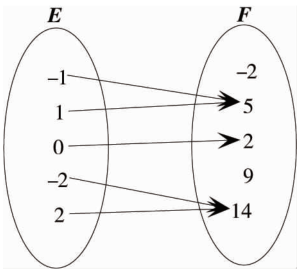

图 5　集合 $\boldsymbol{E}$ 与集合 $\boldsymbol{F}$ 中元素关系图

最后，判断某位学生的几次数学考试成绩 y 是否为序号数 x 的函数(如表 2 所示)，利用函数概念的图表表征设计一些新鲜有趣的问题。表格中出现了“缺考”这一元素，它代表“0 分”、空缺或是“缺考”二字本身，对其不同的理解会影响该问题的答案，因此需要分类讨论，这样就比较容易激发学生的探究欲望[6]。

同一函数的解析式表征可能存在不同的表现形式，但其本质——对应关系是不变的。让学生

判断两个函数解析式是否相等也是一种精细概念的方法,如,判断函数 $y=|x|$ 与以下哪个函数相等:(1)$y=(\sqrt{x})^2$;(2)$y=\sqrt[3]{x^3}$;(3)$y=\sqrt{x^2}$;(4)$y=x^2/x$。解决该问题有两种方法,方法一,明确两个函数解析式表征的定义域和对应关系,检验它们是否相同,若是,则两个函数相等;方法二,借助计算机把函数解析式表征转换为图像表征,当两个图像完全重合,则两个函数相等。

表 2　数学考试成绩情况表

序号数 x	1	2	3	4	5	6	7
成绩 y	75	83	缺考	90	69	86	79

4　结语

本文把函数概念的教学设计成引导学生在不同外在表征方式之间进行转换和转译的过程。设计时应考虑大多数学生的原有认知水平,安排恰当的表征出现顺序,在教学中借助概念的多元外在表征形式帮助学生建构有关概念的完整的认知结构,培养数形结合的意识,这不仅利于概念理解,也利于之后的概念运用,能帮助学生快速地选择合适的表征方式来形成清晰的解题思路。基于多元表征理论,还可以结合教学内容与学生的实际情况,设计更多课例,优化数学教学设计,提高教学效率。

参考文献:

[1] 唐剑岚.国外关于数学学习中多元外在表征的研究述评[J].数学教育学报,2008(1):30-34.

[2] 郑毓信.多元表征理论与概念教学[J].小学数学教育,2011(10):2-4.

[3] Hiebert J, Carpenter T P. Learning and teaching with understanding [J]. Handbook of Research on Mathematics Teaching & Learning, 1992(1):65-97.

[4] 曹新."分数的初步认识"中的多元表征学习问题[J].教育学术月刊,2013(12):70-75.

[5] 朱斌.函数概念多元表征学习与教学探知[J].学苑教育,2012(23):54.

[6] 何小灵."函数的概念"教学设计[J].中国数学教育,2017(z2):9-11.

Mathematical Teaching Design Based on Multiple-representations Theory:

A Case Study of the Teaching of "Function Concept"

LI Dongmei, LIU Yao

(School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: Mathematics teaching based on the multiple-representations theory, can use abundant external characterization to highlight the mathematical objects in all aspects, improve the overall structure and significance of mathematics, and enhance the attraction and interest of mathematics. Taking the function concept of high school as an example, this paper discusses the practical application of multiple-representations theory in teaching design, uses the transformation between different representations of functions to guide students to understand the necessity of developing function concept, undergoes the process of concept formation, and captures the essence of concept, so as to help students better understand the concept of function and further discover the pleasure of learning.

Key words: multiple-representations; teaching design; function concept

(责任校对　谢宜辰)