

doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2018.06.010

数学建模思想融入数值分析课程的改革与实践

王建云¹, 田智鯤², 张发明¹, 赵育林¹

(1. 湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007; 2. 湖南工程学院 理学院, 湖南 湘潭 411104)

摘要:数值分析是一门理论与实践紧密结合的课程。在教学的实践过程之中,既要注重讲解课程内容的基本概念、算法思想和解题方法,更要通过实际问题来说明方法的应用。针对数值分析课程的特点,阐述了将数学建模思想融入数值分析的重要意义和改革内容,并结合曲线拟合和插值法这两个知识点,相应地设计出数学建模实践教学案例。

关键词:数学建模;数值分析;教学改革

中图分类号:G642.0

文献标志码:A

文章编号:1674-5884(2018)06-0050-04

1 数学建模思想融入数值分析的意义

随着现代科学技术的进步,特别是计算机的出现和普及,数学的应用不再局限于物理学、建筑设计、工程技术等传统领域,已经迅速地渗透到一些交叉学科和新的研究领域,提出了大量有待解决的实际研究课题。要解决这些问题,建立合适的数学模型就是非常关键的一步,将实际问题转化为相应的数学问题,然后对数学问题建立相应的数值方法^[1]。数学模型(Mathematical Model)是对于现实世界的特定对象,为了一个特定目的,根据特有的内在规律,进行必要的简化和假设,运用适当的数学符号、定理和关系式等,得到一个概括表达问题的数量关系和空间形式的数学结构^[2]。数学建模(Mathematical Modeling)是通过抽象、简化、假设、变量引入等处理过程后,运用所学知识分析和解决问题,将实际问题通过数学的方式来表达,结合各种数值计算方法和数学软件进行数值求解。复旦大学李大潜院士指出,坚持方向,树立信心,努力将数学建模思想融入数学类主干课程,特别是大学本科数学类主干课程中去^[3]。

数值分析是高等院校数学类专业信息与计算

科学、数学与应用数学等的主干课程,也是很多工科类专业的公共基础课^[4]。数值分析也是一门知识内容丰富、研究方法深刻、理论体系完善的课程,与计算机结合得非常紧密,有着很强的社会实用价值。将数学建模思想融入数值分析课堂教学的主要目的就是让学生知道这门课的用途和怎样用。要解决具体的实际问题,首先需要建立起适当的数学模型,将实际问题的解决归结为相应的数学问题的求解,然后对所归结的数学问题建立相应的数值方法^[5]。为了更好地激发学生的学习兴趣 and 潜力,提高课堂的教学效果,可以引入一些实际案例,通过建立适当的数学模型,将实际问题的解决归结为数学模型的求解,然后对数学模型设计相应的数值方法。这样可以达到在解决实际问题的过程中推导算法,在算法分析中引入理论知识,让知识的引入犹如“随风潜入夜”,知识的应用如同“润物细无声”^[6]。同时,数值分析中很多知识点在一些数学模型的求解过程中经常被用到,如拉格朗日(Lagrange)插值、数据拟合、最小二乘法等。因此,在数值分析的课堂教学中合理地融入数学建模思想是必要的和可行的,也非常具有理论价值和实践意义。

收稿日期:20180505

基金项目:湖南省普通高等学校教学改革研究项目(20164001085)

作者简介:王建云(1981-),男,湖南常宁人,讲师,博士,主要从事偏微分方程数值方法及应用研究。

2 数学建模思想融入数值分析的改革

2.1 丰富教学方法,改变传统的教学方式

在以往传统的教学方式中,整堂课都是老师在讲个不停,学生没有更多的思考时间和空间,而是一味地被动接受。同时,学生刚开始接触到数值分析时,通常会觉得这门课程的难度比较高,难以跟上任课教师的授课节奏和思路。传统的填鸭式教学方式的教学效果不理想,也会导致学生的学习激情和兴趣下降。由于数值分析课程中涉及的很多问题,都是从实际应用中提炼出来的,再用数学理论去进行推导,然后提出具体的解决方法。因此,对于很多知识点的讲解,尽量从实际例子中提出问题,引导学生思考如何运用数学知识来建立解决问题的方法,再给出相应的数学理论。如在现代机械工业中用计算机程序控制加工机械零件,根据设计可给出零件外形曲线的某些型值点,加工时为控制每步走刀方向及步数,就要算出零件外形曲线其他点的函数值,才能加工出外表光滑的零件,这就涉及数值分析中的一个核心概念,即求插值函数的问题。另外,人口增长模型就是一个常微分方程初值问题的一个简单例子,还有卫星运行轨道和单摆运动等。老师在课堂知识点的讲解过程中,适当抛出一些问题,留下充分的时间让学生去思考。也可以进行一些互动环节,让学生来进行例题的练习和讲解,这样可以吸引学生积极参与到教学活动中来,从而避免了老师一个人唱独角戏的情形。

2.2 结合数学建模,注重平时的实验课程

数值分析的课程内容具有非常广泛的物理背景,老师在授课过程中,可以先从实际背景入手,

并与数学建模有机地结合起来,让晦涩难懂的概念和定理通过实际的案例而变得生动。数学建模的题目基本上都是与实际生活密切相关的一些问题,具有很强的实践应用和现实意义。在平时的数值分析实验课程中,老师可以从一些实际问题出发,引导学生根据自己所学的知识建立数学模型,然后利用数值计算方法进行模型的数值求解,并借助计算机语言编程得出其数值解。在整个学习过程中,让学生体会到理论与实践的完美结合,掌握数学知识和数值方法的实际运用。这样不仅锻炼了学生的独立思考能力,还提高了他们的实践动手能力。同时,上机实验也是数值分析区别于其他数学课程的显著特点之一。其主要目的在于,训练学生将课堂中学到的数值方法理论运用到实际的算例之中,培养学生的数值计算实践能力和计算机编程能力,这也是消化在课堂上所学习到的理论知识的一个过程。针对同一个问题,学生可以尝试用不同的方法去解决并进行结果比较,以此来检验各种数值方法的优缺点。而且,在实验的具体计算过程中,可以通过画图和列表等直观生动的方式,加深对课堂理论知识的理解。

3 数学建模思想融入数值分析的实践

3.1 曲线拟合案例

为了从宏观的角度控制人口的增长,需要掌握人口数量的某些变化规律,提前进行较准确的分析和预测。已知1800年到1890年美国人口统计数据如表1所示,试建立人口增长模型进行分析,并预测美国2000年的人口数量。

表1 美国人口统计数据

单位/百万

年	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
人口	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4	38.6	50.2	62.9

英国人口学家马尔萨斯(Malthus)于1798年提出人口指数增长模型,即著名的Malthus模型。

模型假设:

(1)假设在社会稳定的前提下,生育率和死亡率都比较稳定;

(2)假设只考虑本国内部的迁移,而忽略国际迁移;

(3)忽略突发灾难性疾病、战争等对人口的影响;

(4)假设国家对人口方面的政策基本稳定。

模型建立:记 $x(t)$ 为 t 时刻的人口数量, x_0 为 $t=0$ 时刻的人口数量。由于人口数量比较大,可以近似地认为 $x(t)$ 为时间 t 的一个连续可微函数。根据假设条件可知,人口增长率 r 为常数,则在 Δt 时间内,人口增长的数量为

$$x(t + \Delta t) - x(t) = r \cdot x(t) \cdot \Delta t。$$

于是,得到 $x(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dx}{dt} = rx, x(0) = x_0。$$

模型求解:解微分方程可得

$$x(t) = x_0 e^{rt},$$

其中参数 r 和 x_0 可以用表 1 的数据估计,将上式两边分别取对数得

$$y = rt + b, \quad y = \ln x, \quad b = \ln x_0,$$

利用最小二乘法以 1900 年至 1990 年的数据进行拟合,用 Matlab 计算得到

$$r = 0.2775, \quad b = 1.7114.$$

所以拟合函数为

$$x(t) = 5.5365e^{0.2775t},$$

因此,预测美国 2000 年的人口数量为

$$x = 1424.2 \text{ (百万)}.$$

实际人口数据与计算人口数据见表 2, 图 1 为其拟合图像。

表 2 人口指数增长模型计算结果

年	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
实际人口	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4	38.6	50.2	62.9
计算人口	5.5	7.3	9.6	12.7	16.8	22.2	29.3	38.6	51.0	67.3

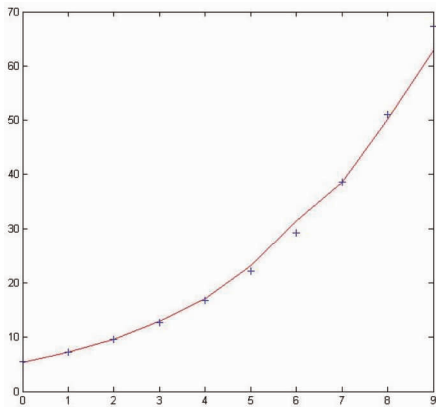


图 1 人口指数增长模型拟合图

比较拟合曲线图和数据散点图(图 1),可以发现拟合函数与 19 世纪美国人口的增长情况相吻合。但是预测美国 2000 年的人口数量 1424.2 (百万),与实际人口数量 281.4 (百万)的误差比较大,这说明用指数增长模型预测短时期人口数量可以得到较好的结果,但是不适合预测长时期人口的增长情况。

通过分析这个案例,能够让学生更加直观地理解最小二乘法曲线拟合的原理,进一步加深学生对该知识点的掌握,也为数模竞赛解决类似的问题做好了铺垫。

3.2 插值法案例

设有一个年产量 23 万吨的钢铁厂,现在需要统计其生产费用,但是由于该厂的各项数据资料部分丢失,已经无法进行统计。在这样一种情况下,统计部门收集了在人员、设备、生产能力等方面和该厂非常接近的 5 个钢铁厂的数据资料,如表 3 所示。

表 3 钢铁厂的统计数据

钢铁厂	A	B	C	D	E
产量(万吨)	20	22	24	26	28
生产费用(亿元)	3.0	3.3	3.5	3.6	3.9

如何根据已知 5 个钢铁厂的资料来比较准确地估计该厂的生产费用呢?

我们可以利用拉格朗日插值,构造插值多项式来求解这样一个问题。

模型假设:设该钢铁厂的人员、设备、生产能力等各方面与表 3 中的 5 个钢铁厂几乎相同,即其产量与生产费用的关系与这 5 个钢铁厂相似。

模型建立:记 x_i, y_i 分别表示钢铁厂的产量和生产费用,则可以得到插值节点信息,如表 4 所示。

表 4 插值节点信息

i	0	1	2	3	4
x_i	20	22	24	26	28
y_i	3.0	3.3	3.5	3.6	3.9

利用 5 个节点可以构造四次拉格朗日插值多项式

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 y_k L_k(x),$$

其中

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_4)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_4)},$$

$$k = 0, 1, \dots, 4,$$

为拉格朗日插值基函数,且满足

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \dots, 4.$$

则四次拉格朗日插值多项式满足

$$P_4(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, 4.$$

模型求解:利用 Matlab 进行计算可得该厂的生产费用为

$$P_4(23) = \sum_{k=0}^4 y_k l_k(23) = 3.42(\text{亿元}).$$

图2为四次拉格朗日插值多项式的图像。

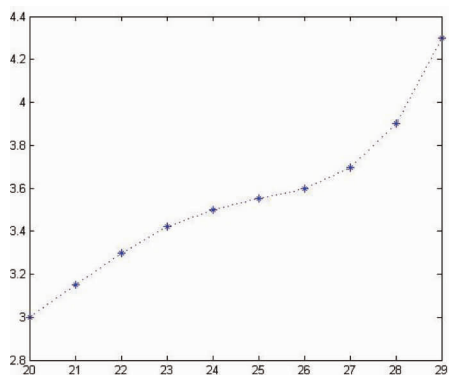


图2 拉格朗日插值多项式的图像

通过该案例的学习,可以让学生加深理解拉格朗日插值法的原理及其应用,提高了学生解决实际问题的动手能力。

4 结语

将数学建模思想融入数值分析课程的教学

是非常有必要的,也是一种有益的改革尝试。在教学实践中的具体运作,需要老师对其不断改进和优化,选取与数值分析知识点密切相结合的教学案例,运用适当的教学方法和手段,使得学生更加重视课程的理论学习,充分发挥他们的主观能动性,更好地运用相关数值方法去解决实际问题。这样不仅可以突出课程实践应用的意义,培养学生的创新研究能力,提高学生的数学建模水平,而且还能够降低理论知识的抽象性和理解难度,显著地提高教学质量,获得事半功倍的教学效果。

参考文献:

- [1] 周金明,朱晓临,张伟. 结合数学建模改革《数值分析》教学[J]. 大学数学,2013(5):13-17.
- [2] 姜启源,谢金星,叶俊. 数学模型(第4版)[M]. 北京:高等教育出版社,2011.
- [3] 李大潜. 将数学建模思想融入数学类主干课程[J]. 中国大学教学,2006(1):9-11.
- [4] 李军成,陈国华,宋来忠. 数学建模在数值分析教学中的实践[J]. 电脑知识与技术,2012(1):228-230.
- [5] 郭金,韦程东. 在数值分析教学中融入数学建模思想的研究与实践[J]. 广西师范学院学报(自然科学版),2008(3):124-127.
- [6] 张健. 将数学建模思想融入数值分析课堂的探讨[J]. 中国电力教育,2012(17):70-71.

Reform and Practice of Integrating Mathematical Modeling into Numerical Analysis Course

WANG Jianyun^a, TIAN Zhikun^b, ZHANG Faming^a, ZHAO Yulin^a

(a. School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China;

b. School of Science, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, China)

Abstract: Numerical analysis is a course which closely combines theory with practice. In the process of teaching practice, we should not only pay attention to the basic concept of the course content, the algorithm thought and the method of solving the problem, but also explain the application of the method through the practical problems. According to the characteristics of the numerical analysis course, this paper expounds the significance and reform content of integrating mathematical modeling into numerical analysis. Combining with two knowledge points of curve fitting and interpolation, we design corresponding practice teaching cases with the mathematical modeling, respectively, which can enrich classroom teaching methods, stimulate students' interest in learning, improve the level of mathematical modeling, and enhance the ability of computer programming.

Key words: mathematical modeling; numerical analysis; teaching reform

(责任校对 朱春花)