doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2017.08.009

# 换元法求定积分的巧用

林娇燕

（广东水利电力职业技术学院 数学教学部,广东 广州 510635）

**摘　要**:定积分在积分学中占有重要的位置,也是在生产实践中计算非均匀变化量的一种非常有用的方法,而换元积分法在定积分的计算中是重点和难点,特别是对于原函数难于求出甚至无法求出的积分更是难上加难。论文总结并介绍定积分换元积分法的两个定理和四个推论,当有些被积函数的原函数难求甚至无法求出时,可巧妙利用这些定理或者推论求出定积分。

**关键词**:定积分;换元积分法;原函数

**中图分类号**:O13　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-5884(2017)08-0034-03

在积分学的教学中,有些教师往往会告诉学生定积分的换元法跟不定积分的换元法是一样的,不定积分怎么求定积分就怎么求[1]174[2]127,实际上这种说法是不够全面与具体的,以至于会造成学生的困惑。因为不定积分是原函数族,而定积分是个常量,这是本质的区别。而且有些被积函数的原函数是求不出来的,因为它们不能用初等函数来表达,学生对这部分题求不定积分往往就无法求解,但如果是求定积分,有些题就不一定必须求出原函数,可以用以下几个公式,通过适当换元后求出定积分。

## 1　主要结论及其证明

**定理1**[3]254　设$f(x)$在$[-a,b]$上可积,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x。$$

证明:令$x=a+b-u$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

故命题成立。

由此定理可以得到以下3个推论。

推论1　设$f(x)$在$[a,b]$上可积,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b [f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x。$$

证明:若令$g(x)=f(x)+f(a+b-x)$,则

$$g(x)=g(a+b-x),$$

故$g(x)$关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称,从而由定理1可知命题成立。

推论2　设$f(x)$在$[-a,a]$上可积,则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x。$$

收稿日期:20170331

基金项目:广东省省级科技计划项目(2013A080500003)

作者简介:林娇燕(1963-),女,海南陵水人,副教授,主要从事高等数学教学研究。

证明:设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积,则由推论 1 得

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x,$$

故命题成立。

推论 3　设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积,若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$,

若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$。

证明:设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积,

若 $f(-x)=f(x)$,则由推论 2 得 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

若 $f(-x)=-f(x)$,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 0$,

故命题成立。

定理 2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}+x)\mathrm{d}x$。

证明:令 $x = \frac{a+b}{2}+u$,则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}+u)\mathrm{d}u = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}+x)\mathrm{d}x,$$

故命题成立。

由此定理又可以得到以下推论。

推论 4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{b-a}{2}}\left[f(\frac{a+b}{2}+x)+f(\frac{a+b}{2}-x)\right]\mathrm{d}x$。

证明:根据定理 2 和推论 2 得

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}+x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{b-a}{2}}\left[f(\frac{a+b}{2}+x)+f(\frac{a+b}{2}-x)\right]\mathrm{d}x,$$

故命题成立。

## 2　举例

下面举例说明这些定理和推论的应用,使学生能更好地掌握其方法,起到抛砖引玉的作用。

例 1　求定积分 $\int_{-2}^{2} x(1+x^{2001})(\ell^{-x}-\ell^{x})\mathrm{d}x$。

解:因为 $x^{2002}(\ell^{-x}-\ell^{x})$ 为奇函数,$x(\ell^{-x}-\ell^{x})$ 为偶函数,根据推论 3 得

$$\int_{-2}^{2} x(1+x^{2001})(\ell^{-x}-\ell^{x})\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} x(\ell^{-x}-\ell^{x})\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} x\mathrm{d}(-\ell^{-x}-\ell^{x})\mathrm{d}x =$$

$$2[x(-\ell^{-x}-\ell^{x})]\big|_0^2 - 2\int_{0}^{2}(-\ell^{-x}-\ell^{x})\mathrm{d}x = 2[2(-\ell^{-2}-\ell^{2})] - 2(\ell^{-x}-\ell^{x})\big|_0^2 = -2(3\ell^{-2}-\ell^{2})。$$

一般地,如果积分区间是关于原点对称的,应该首先想到用推论 3 以简化运算。

例 2　计算 $\int_{0}^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+1\ 002}\mathrm{d}x$。

解:由定理 1 可知

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+1\ 002}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[f(x)+f(\pi-x)]\mathrm{d}x =$$

$$\pi\int_{0}^{\pi}\frac{1}{x^2-\pi x+1\ 002}\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\pi}\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{\pi^2}{4}+1\ 002}\mathrm{d}x =$$

$$\pi\frac{1}{2\sqrt{1\,002-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1\,002-\frac{\pi^2}{4}}}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{4\,008-\pi^2}}\arctan\frac{\pi}{\sqrt{4\,008-\pi^2}}。$$

此题难点在于被积函数的分子中含有 $\cos x$，若令

$f(x)=\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+1\,002}$ 则 $f(\pi-x)=\frac{\pi-\cos x}{x^2-\pi x+1\,002}$

以上两式相加后可消去 $\cos x$。

例 3　计算定积分 $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{x\sin^5x}{1+\cos^6x}dx$。

解:由推论 1 得

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{x\sin^5x}{1+\cos^6x}dx=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\sin^5x}{1+\cos^6x}+\frac{(\pi-x)\sin^5x}{1+\cos^6x}\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin^5x}{1+\cos^6x}dx=0。$$

此题也可用定理 2 或推论 4 求解。

例 4　求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$。

解:由定理 1 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\ln(1+\tan x)+\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\right\}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx=\frac{\pi}{8}\ln 2。$$

此题亦可用推论 1 求解。

此被积函数的原函数是求不出来的,这时不妨考虑 $f(x)+f(a+b-x)$ 是否比原来的被积函数简单并且容易积分,若是,则可用定理 1。

例 5　求积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ell^{-x}\sin^2x\cos^2x}{1+\ell^{-x}}dx$。

解:由推论 2 得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\ell^{-x}\sin^2x\cos^2x}{1+\ell^{-x}}dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\ell^{-x}\sin^2x\cos^2x}{1+\ell^{-x}}+\frac{\ell^{x}\sin^2x\cos^2x}{1+\ell^{x}}\right)dx=$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2x\cos^2xdx=\int_0^{\pi}(\sin^2x-\sin^4x)dx=\frac{\pi}{8}。$$

一般地,如果积分区间是关于原点对称,而被积函数是非奇非偶且无法拆成具有奇偶性的代数和,则往往运用推论 2。从以上例子可以发现,除了例 1 外都无法求出原函数,有些题即使可以求出原函数,但是当计算复杂时,不妨运用换元积分法的对应定理简化运算。

## 3　结语

求定积分时不能总想着牛顿 - 莱布尼茨公式,只想着求出原函数,当求原函数比较困难或者求不出来时,不妨想想是否有什么巧妙的换元法可以求出定积分的值。

**参考文献:**

[1] 侯风波. 高等数学[M]. 北京:高等数学出版社,2002.
[2] 那顺布和,林娇燕. 应用高等数学[M]. 长沙:湖南师范大学出版社,2011.
[3] 同济大学数学系. 高等数学:上册(第 6 版)[M]. 北京:高等数学出版社,2009.

(责任校对　谢宜辰)