

函数列收敛性判别法的动态与静态性教学法

刘炎,张学奇,陈文辉
(广东金融学院 应用数学系,广东 广州 510521)

摘要:以“动态”和“静态”的对立统一思想来讨论函数列与函数项级数的收敛性与一致收敛性,据此,我们可以对于函数列收敛性判别法提供一种新的教与学的方式。
关键词:函数列;函数项级数;收敛性;一致收敛性
中图分类号:G0171 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-5884(2016)08-0062-03

函数列的收敛性与一致收敛性是函数的重要性质,它在级数的收敛理论中扮演着相当重要的角色。一般的数学分析书籍都列出了许多判定方法,但是根据定义判定函数列的收敛性与一致收敛性的过程过于繁琐,学生很难掌握其本质,更难以灵活地用于实际判断。事实上,这种困难在于没有很好的把握收敛性定义与各种判定方法中的动静思想。我们可以注意到,无论从定义,命题还是习题,“任给”与“存在”是一对经常并行出现的量词。“任给”是先动后静,“存在”是依赖着动而静,是一种动静结合的逻辑体系,可以说贯穿于整个分析学。本文从教学实践出发,强化动态和静态的思想来分析函数列的收敛性问题,得出这两种状态下收敛与一致收敛性的判定方法,并给出相应的例题;最后,将此思想运用于函数项级数的一致收敛的判断,收到了很好的教学效果。

1 判别函数列收敛与一致收敛的方法

按照函数列收敛的定义,当我们考察函数列 $\{f_n(x)\}$ 在某区间 I 内的收敛性的时候,我们通常需要考察这个函数列在这个区间内是否逐点收敛于某一函数 $f(x)$ 。但是在实际应用的过程中,运用此方法比较繁琐。因此,我们引入静态的思想。将 x 固定在 x_0 之时,我们称之为静态。而若函数列 $\{f_n(x)\}$ 所处静态之时且同时令 $n \rightarrow \infty$,若函数列 $f_n(x_0)$ 收敛于 $f(x_0)$,那么我们认为函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛。归结以上,我们有以静态方法判断函数列收敛的结论:

结论1 对函数列 $\{f_n(x)\}$,将 x 固定在在区间 I 内的 x_0 ,若满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$,那么限函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛。

在考察函数列 $\{f_n(x)\}$ 在某区间 I 内的一致收敛性的时候,判定过程更为复杂。以往,我们先要求出极限函数 $f(x)$,再找出一个 $N = N(\varepsilon)$ 使得函数列与极数的差值 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 。我们引入动态的思想判定函数列的一致收敛性。当 x 为在区间 I 上任意变化的时候,我们称之为动态。若函数列 $\{f_n(x)\}$ 所处动态之时,并使 $n \rightarrow \infty$,若函数列 $f_n(x)$ 的极限为 $f(x)$,那么函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛。通过以上分析,我们得出以动态方法判断函数列一致收敛与不一致收敛结论:

结论2 对函数列 $\{f_n(x)\}$,将 x 设在区间 I 内任意变化的值,若总满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$,那么函数

列 $\{f_n(x_0)\}$ 一致收敛。

事实上,函数列一致收敛的动态性反映为 x 在区间 I 上的任意变化性,也即存在一个不依赖 x 而只依赖于控制函数差值的 ε 的充分大的数 $N = N(\varepsilon)$,使得当 $n > N = N(\varepsilon)$ 时,有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 成立。这种 N 不依赖 x 的变化性就是动态性的反映。 x 变, N 不依赖 x 而变,由动而导致静正是一致收敛的核心。并由此,我们有得到一致收敛的否定性结论:

结论 3 对函数列 $\{f_n(x)\}$,将 x 设在区间 I 内任意变化的值,若我们总能选取 x 与 n 满足一定的关系,并使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$,那么函数列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛。

2 收敛与一致收敛判别方法的应用

例 1:判别函数列 $f_n(x) = \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}}(n = 1,2,\cdots)$ 在区间 $[0,1]$ 内的收敛性与一致收敛性^[1]。

首先我们在区间 $[0,1]$ 内取定 x_0 ,并且固定 $x = x_0$,使之处于静态。为了考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ 是否等于 $f(x_0)$,我们必须求出极限函数 $f(x)$ 。我们发现

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2x}{e^{n^2x^2}} = 0.$$

而固定 $x = x_0$,同时运用洛必达法则可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2x_0}{e^{n^2x_0^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_0e^{n^2x_0^2}} = 0 = f(x_0).$$

发现满足结论 1 中的 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ 。因此,根据结论 1,函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 内收敛。

另外,为了考察 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 内的一致收敛性,我们首先要找出 $n = n(x)$ 使得 x 在不断变化的同时 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 。

我们发现如果选定这样的一个 n 和 x ,使得当 n 趋于无穷大时, x 充分接近 0 即 $x = \frac{1}{n}$,那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2x^2}{e^{n^2x_0^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} n \rightarrow \infty.$$

因此我们发现 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$ 。根据结论 2,我们并不能对于任意变化的 x 使得 $f_n(x)$ 的极限为 $f(x)$ 。因此,函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 内不一致收敛。

例 2. 判断 $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ 在以下区间是否收敛与一致收敛。(1) $x \in [0,1]$ (2) $x \in (-\infty, +\infty)$ [2]。

首先在两个区间中分别取 $x_0 \in [0,1], x_1 \in (-\infty, +\infty)$ 使之处于静态。为了考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ 是否等于 $f(x_0)$,必须求出极限函数 $f(x)$ 。易知 $f(x) = 0$ 。如果固定 $x = x_0$,那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x_0}{n} = 0.$$

同理,固定 $x = x_1$,也有相同的结果。因此根据结论 1,发现在 $[0,1]$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 内函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛。以下分别讨论函数列 $\{f_n(x)\}$ 在这两个区间内的一致收敛性:

(1) 并不固定 x 的取值,让其在区间 $[0,1]$ 内变化。我们发现无论 x 如何变化,总有 $x \leq n$ 成立。因此无论 x 在 $[0,1]$ 中如何变化,当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} = 0 = f(x).$$

根据结论 3,在此区间 $[0,1]$ 内总能使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 。成立,因此函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛。

(2) 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,我们让 x 在区间内变化,使其处于动态的过程。同时,使 x 充分大,选取

x 与 n 满足 $x = n + 1$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{x}{n} + 1 \right) = \sin 1 \neq 0$$

发现 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$ 。根据结论 3, 可知在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 选取 X 与 n , 满足 $x = n + 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$, 因此函数列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛。

最后, 我们将上述动态和静态的思想应用于函数项级数收敛性与一致收敛性的判断。我们通过一条例题来说明这种方法的应用。

例 3 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $[0, 1)$ 上的收敛性与一致收敛性^[2,3]。

首先在区间 $[0, 1)$ 上选取 x_0 并固定 $x = x_0$, 那么会发现

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x_0^{n+1}}{1 - x_0} = \frac{1}{1 - x_0}.$$

根据结论 1, 可以得函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $[0, 1)$ 上收敛。

接下来, 讨论此函数项级数的一致收敛性。此时并不固定 x 的取值, 让其处于动态的过程。我们选取 x 与 n , 使 x 充分靠近 1 即 $x = 1 - \frac{1}{n}$. 那么可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty.$$

根据推论 1, 我们可知在区间 $[0, 1)$ 内, 选取 x 与 n , 满足 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightarrow \infty$, 因此函数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $[0, 1)$ 上不一致收敛。

由上讨论可知, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $[0, 1)$ 内不一致收敛的原因是 x 可以充分靠近 1。因此如果将区间设定

为 $[0, 1 - \alpha]$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$. 那么 x 就不能充分靠近 1, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $[0, 1 - \alpha]$ 内一致收敛。

3 结论

动态与静态思想贯穿整个分析体系, 从数列极限、函数极限、函数连续性、导数与微分积分、数列与函数列的收敛性、数项级数与函数项级数的收敛性等等, 可谓无处不在, 从而数学分析教学中对动态与静态思想方法值得我们深入细致的研究。在数学分析的教学中, 始终要向学生阐明这些基本结论与概念中蕴涵的动与静的辩证关系, 并且立足于让学生以动的方法去理解, 以静的方法去解决, 这样才能真正掌握其要领。

参考文献:

- [1] 徐志庭, 刘名生, 冯伟贞. 数学分析(二)[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [2] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] 吕通庆. 一致收敛与一致连续[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.

(责任校对 王小飞)