

高等代数学习中的困惑与解决对策

欧阳伦群, 欧阳伦键

(1. 湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201; 2. 洞口县文昌中学, 湖南 洞口 422300)

摘要: 学生在学习高等代数时普遍存在不知高等代数为何物、有何用与如何学的困惑。解决这些困惑的对策是教师在综合分析教材体系的基础上阐明矩阵是高等代数的核心内容, 在适当介绍背景知识和知识演变过程的基础上展示高等代数的广泛应用; 在多方面注重学生数学思维训练的基础上提高学生学习能力。

关键词: 困惑; 矩阵; 高等代数

中图分类号: O151.2

文献标志码: A

文章编号: 1674-5884(2015)05-0042-03

高等代数课程是大学数学专业最重要的基础课程之一。其教学质量的好坏, 直接关系到初等数论、近代代数、线性规划等多门后续课程的学习, 也是考研能否取得成功的关键。面对如此重要的一门基础课程, 有种现象却不能不引起我们的关注与思考, 这就是: 学生也知道高等代数课程的重要性, 也花费了不少时间和精力, 学习成绩却提高缓慢; 很多任课老师感到费了不少精力, 想尽了各种办法, 教学效果总是不尽人意。问题的症结在哪里? 如何激发学生学习兴趣, 提高高等代数课程的教学质量? 这是所有教高等代数课程老师不得不严肃思考的问题。我们经过多年调查研究并结合实践经验以及对学生学习高等代数课程过程的仔细观察, 归纳总结了学生在学习高等代数中出现的种种困惑, 并对出现这些困惑的原因进行了分析, 同时提出解决这些困惑的行之有效方法。

1 学生的困惑及原因分析

困惑之一是不知高等代数为何物。表现为: 1) 不知高等代数研究对象, 对高等代数课程缺乏宏观整体把握和认识; 2) 不知高等代数研究方法, 在学习过程中遇到问题时, 找不到解决问题的切入点; 3) 不知高等代数与初等代数知识的内在联系, 在学习中无法顺利完成从已有知识到新知的迁移。出现此种困惑, 归纳起来, 主要是由以下原因造成的: 一是数学专业学生一初进大学, 缺乏对本课程的整体感知。二是学生比较熟悉的是初等代数, 研究对象和人们的生活实际比较接近, 非常具体也非常直观。而高等代数研究的是代数系统的内在结构与运算规律, 已经高度脱离了人们的生活实际, 具有很高的抽象性。那种高度抽象化的理论体系和严密的逻辑推理方法, 对刚进入大学的学生来说, 往往有点不太适应, 不能熟练运用和掌握。三是许多老师在高等代数的教学实践中, 只重视本课程新知的传授, 对所教知识点是如何从初等代数逐步演变成高等代数的发展过程, 教学中很少涉及, 造成学生找不到高等代数与初等代数联系的桥梁, 无法顺利完成从旧知到新知的迁移。

困惑之二是不知高等代数有何用。具体表现在: 1) 不知高等代数对整个数学理论体系的发展与完善有何用; 2) 不知高等代数对其他相关学科的发展与完善有何用; 3) 不知高等代数对人类生产生活实践有何用; 4) 不知高等代数将来对促进自己事业发展, 帮助自己成才有何用。前3个“不知有何用”之所以出现, 除学生刚进入大学, 知识储备还不多、视野还不够开阔、缺乏对整个数学知识体系的了解等主观原因外, 还有一部分原因是由于在高等代数的课堂教学中, 大多数老师采用的仍是一支粉笔、一块黑

板、一本教科书的传统教学模式,偏重书本知识的传授,忽视对所教知识点的背景和应用前景介绍,忽视所教理论知识与实际生活实践的联系,造成很多学生在学习高等代数过程中,既不知高等代数理论在整个数学理论体系中的地位 and 作用,又看不到高等代数中相关知识的应用背景。第四个“不知何用”之所以出现,其原因是:数学专业的学生,尤其是师范类数学专业的学生,毕业后多数从事初等数学教学。他们渴望知道高等代数与初等代数的联系,学好高等代数课程在哪些方面对他们今后的教学工作有帮助。然而大学数学专业教高等代数的老师虽然有非常扎实的知识功底,但大多没有从事初等数学教学的工作经历,对初等数学教材体系并不熟悉,课堂上对高等代数与初等代数的联系讲得比较少,使得一部分学生没有意识到高等代数知识对于自己将来成为一名优秀的中学数学老师有多么重要。

困惑之三是不知高等代数如何学。具体表现是:1)不知如何学习高等代数中的概念、定义与定理等新知。学生常常出现这种情况:老师上课时觉得课堂知识还算容易,好像听懂了,弄明白了,老师一走,又觉得什么也没学到。课后花了相当多时间精力来消化吸收,学习效果还不尽人意。2)不知如何解答高等代数课后习题。课堂上例题,老师讲解时觉得不难,一旦单独面对课后习题便束手无策。3)面对高等代数,不知如何复习。打开高等代数课本,看到的是一大堆复杂繁琐的概念、定义、定理与性质,千头万绪,不知如何入手,畏难情绪油然而生。造成此种困惑的原因之一是大学数学有一套有别于中学数学的学习方法,学生刚进入大学,还没有找到学习大学数学的钥匙和方法,由于思维的惯性,许多同学仍沿袭中学数学的学习方法,事事依赖老师,缺乏学习的主动性和解决问题的独立性。正是这种曾经熟悉的中学数学学习方法面临淘汰,而新的学习方法还没有建立的尴尬造成了学生不知如何学的困惑。

2 解决困惑的对策

要解决困惑之一,需做好以下几个方面的工作:1)老师在教学中必须阐明高等代数的课程体系,并在分析课程体系内在联系的基础上让学生明白高等代数研究的主要对象。目前国内高校大多采用北京大学数学系编的《高等代数》教程。此教程体系的编排顺序是:多项式行列式线性方程组矩阵二次型线性空间线性变换矩阵欧式空间双线性函数代数基本问题介绍。由于判别线性方程组有解还是无解、在有解的情况下是有唯一解还是有无穷多个解,都是通过比较方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩来实现的;二次型是研究如何利用矩阵的合同变换化二次齐次多项式为标准型;线性空间、线性变换、欧式空间及双线性函数都与矩阵密不可分。因此矩阵是高等代数研究的主要对象也是其核心内容,贯穿于高等代数的始终。高等代数实际上就是一门研究矩阵相关知识的科学。2)教师在教学中必须阐明高等代数的研究方法。高等代数的研究方法通常是先从许多具体的例子中抽象出某个概念,然后通过代数的方法对这一概念进行研究,得到一般的结论,最后再将这些结论返回到具体的例子中,得到各种运用。因此,“具体-抽象-具体”,这便是高等代数研究问题的方法。要学好高等代数,必须正确认识抽象和具体的辩证关系,在抽象和具体之间找到结合点。只有让学生明白高等代数的研究方法,他们在学习高等代数的过程中,才会主动地通过大量具体的例子去理解抽象的概念和定理,再将概念与定理的结论运用到具体的例子中,加深对概念与定理的理解和掌握,并在深入理解概念与定理的同时去发现和证明一些新的结果。3)教师在教学中必须阐明高等代数与初等代数的联系。事实上高等代数中有许多知识点就是初等代数知识的深化,与学生熟悉的初等代数有非常紧密的联系。教师上课中讲清这些联系,有利于克服学生的畏难情绪,激发学生学习兴趣和信心。例如:在讲多项式理论时,告诉学生高等代数中的多项式理论就是初等代数中因式分解知识的进一步深化。在初等代数中,因式分解、一元方程求根和不等式求解等,都必须把一个多项式分解成最简因式乘积,但到底分解到什么时候才是最简,初等代数并没有给出明确的判别法则,通常是凭经验去判断。高等代数中的多项式理论就是对这一知识的全面阐述,明确回答了多项式能不能进行分解和分解到何时才最简的问题。学生明白了高等代数中多项式理论与初等代数的关系,学起多项式理论来就目的明确,轻松许多。在讲线性方程组这一章时,可以给学生作如下分析讲解:三元、四元线性方程组的求解,我们在初等代数中已经学过,通常是用加减消元法来求解的,很自然地,我们会想到 n 元线性方程组怎么求解的问题。在高等代数中,我们是用高斯消

元法来求 n 元线性方程组的解。从本质上来说高等代数中高斯消元法就是初等代数中的加减消元法。学生明白了这一点,畏难情绪就会少很多。在讲 Cramer 法则时,告诉学生在方程组有唯一解的情况下,我们可以用高斯消元法去求解,也可以用 Cramer 法则求解。尽管用 Cramer 法则求解需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式的值,用人工计算非常麻烦,但采用计算编程却比用高斯消元法更为简便。故 Cramer 法则也是一种非常重要的求根法则。总之,让学生弄清了高等代数与初等代数的渊源关系,学生就会发现高等代数并不神秘,是完全可以学好的。

要解决困惑之二,我们的对策是:1) 教学中结合所教内容,适当补充背景知识介绍,简要介绍所教知识的发展演变过程,既能让学生领略历史上伟大代数家的风采,了解他们对代数及其它相关学科的发展所做的伟大贡献,又能让学生体会到代数对其它学科的发展所产生的巨大推动作用。例如:在讲多项式理论时,适当介绍一元高次方程求根的历史,特别是重点介绍法国数学家伽罗瓦在证明五次方程不能用求根公式求解中所采用的全新的理论方法(群论)奠定了现代代数学基础的伟大贡献。在讲高斯消元法,柯西-许瓦茨不等式时,介绍一下伟大数学家高斯、柯西和许瓦茨在数学上的主要工作和取得伟大成就。2) 结合所教内容适当介绍所教知识在数学理论和其他相关学科中的广泛应用。例如:在教范德蒙行列式的相关性质时,告诉学生在拓扑学中要证明 n 维单纯复形 k 可以嵌入 R^{2n+1} 时,就要用到范德蒙行列式的性质;在讲矩阵时,可以结合所讲内容,介绍一下矩阵相关知识在线性规划、运筹学、化学方程式的平衡、交通流量问题、矩阵密码与通讯保密等方面的应用。只有让学生知道高等代数的广泛应用,才能激发学生学好高等代数的动力。3) 结合教材阐明高等代数在中学数学中的广泛应用。数学专业的学生,尤其是师范类数学专业的学生,毕业后大多从事高中数学教学工作。因此阐明高等代数在中学数学中的广泛应用,会增强学生学好高等代数的使命感和紧迫感。关于运用高等代数的知识和方法巧妙解决中学数学中的问题,很多学者都做过深入研究^[1-3]。因此在教学中,有选择性地向学生推荐一些这方面的文献,可以增强学生学习的动力,让学生体会到学好高等代数有助于自己成才。

要解决困惑之三,可以从教师和学生两个方面入手加以解决。在教师方面,教师在上课当中,要注意学生数学思维训练和数学能力的培养。讲了大量的特殊问题之后,要引导学生得出一般结论,培养学生从特殊到一般的归纳能力;给出具体模型实例后,要引导学生如何从具体模型中找出模型的本质,概括出抽象的数学概念,培养学生的抽象思维能力;对于抽象的问题,教会学生如何具体化,培养学生的应用能力;解决了一个问题后,引导学生如何提出新的问题,培养学生的创新能力。只有学生多方面的能力得到了锻炼和提高,学习起来才会得心应手。在学生方面,要学好高等代数,首先要从正反两个方面学好概念。正的方面就是弄清概念是如何叙述的,附带条件有哪些,这些条件是充分还是必要,概念产生的背景是什么。反的方面就是要弄清所学概念的否定式是怎样叙述的,如果去掉概念中某些条件或错误理解概念中某些条件,会导致什么错误结论。其次要适当做题。在做题中加深对概念、定理的理解。同时在做题时要不断总结思路方法,掌握做题规律,以点带面,举一反三,既不搞题海战术,又能提高自己分析问题解决问题的能力。三是经常梳理所学知识。每学完一章,要做好整理和梳理本章知识的工作,总结本章有哪些基本概念,核心内容是什么,解决了什么问题,是运用哪些定理来解决的,写出自己的心得体会。四是学会尝试推广。对书中的定理,尝试改变一下已知条件,看看会得到什么结论,如果把某些条件加强一下,能不能得到更好的结论。经常做一做这方面的推广工作,创新能力就会得到提高。

参考文献:

- [1] 曹福桃. 高等代数在中学数学中的一些应用[J]. 广西师范大学学报(哲学社会科学版), 2006, 27: 135-137.
- [2] 邵运夫, 肖金戈. 高等代数方法在中学数学中的应用[J]. 铜仁学院学报, 2008, 2(1): 81-84.
- [3] 夏师. 高等代数在中学教学的一些应用[J]. 广西右江民族师专学报, 2002, 15(3): 11-13.

(责任校对 谢宜辰)