

# HPME 视野下数学“金字塔”模型研究

陈彦名

(湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:**HPM 是为数学教育而研究数学历史,在数学教育中,依据教学目标和教学过程的需要,将数学史有机地融合到数学教学过程中,增进学生对概念的理解、方法的提炼、思想的升华。而 PME 属于数学、心理学和教育学的交叉学科,侧重研究在数学课堂中,将教师的教学心理活动与学生的学习心理活动有机结合。HPM 与 PME 结合研究(HPME)是数学史、数学、心理学、教育学等学科的集大成者。

**关键词:**HPM;PME;数学问题解决;模型

**中图分类号:**G451.2

**文献标志码:**A

**文章编号:**1674-5884(2015)03-0070-03

## 1 HPM 与 PME 的历史简介

“HPM”可以追溯到1972年在英国艾克赛特举办的第二届国际数学教育大会(ICME)上的一个工作小组。国际数学教育心理学组织(PME)于1976年在德国的卡尔斯鲁厄成立。综合两者来看,HPM 侧重研究如何将数学教学融合到数学史。其侧重在“数学”上,即剖析数学发展的顺序,探究在教学中的应用价值,以期让学生了解数学史。数学的发展脉络基本上是数与运算、图形与几何、方程与函数、无穷与极限、微分与积分;PME 则主要研究当今的数学教育问题,深入到数学学习的心理活动,以更好地提升教师的教学技能与技巧,关注在于“人”,探究如何让学生融入数学学习。HPME 则是 HPM 与 PME 的复合简称,从双视域下研究数学学习。本文侧重从数学学习的某一部分——问题解决,来研究 HPM 与 PME 双视域下的数学问题解决。

## 2 HPME 视野下的数学问题解决之“金字塔”模型研究

### 2.1 “金字塔”模型的内涵研究

由图1<sup>[1]120-125</sup>的“金字塔”模型可知,从I路线来看,法国数学家庞加莱认为:“数学课程的内容应完全按照数学史上同样内容的发展流程展现给学生。”也就是说,结合数学教学内容的实际,教材内容的编写可以显性地出现其中,即某些历史人物及其贡献、重要历史事件发生的时间等;也可以隐性地融入教科书,主要是数学家的思想方法。基于历史发生原理,在数学问题解决过程中,学生的心理认知活动在相当程度上会重塑历史上该知识的演变历程,这正好与心理学上的“心理发展”理论形成默契;具体到某一模块的知识(数与运算,图形与几何,方程与函数,无穷与极限,微分与积分等),在数学问题解决过程中,学生的思维路径或多或少会和古人一样,发生认知障碍(个体在认知活动中内部出现的疑惑与混沌)。

从II路线着手分析,在数学问题解决过程中,随着知识的储备、经验的积累和解题能力的提高,数学学习心理活动水平会由低级向高级的发展方向;数学心理活动包含着诸多因素,在数学问题解决思维活动过程中,它们之间的联结不断变化、重组与整合,形成螺旋式上升的认知技能。

以 III 路线来分析,通过数学问题解决的不断深入与训练,随着大量的数学知识、概念和程序的建构,并且这些知识的存储都是经过精细加工和组织化的,进而丰富陈述性知识和程序性知识,以获得更多的产生式,这样学生就可以实现生手→学徒→精熟→专家的发展模式。

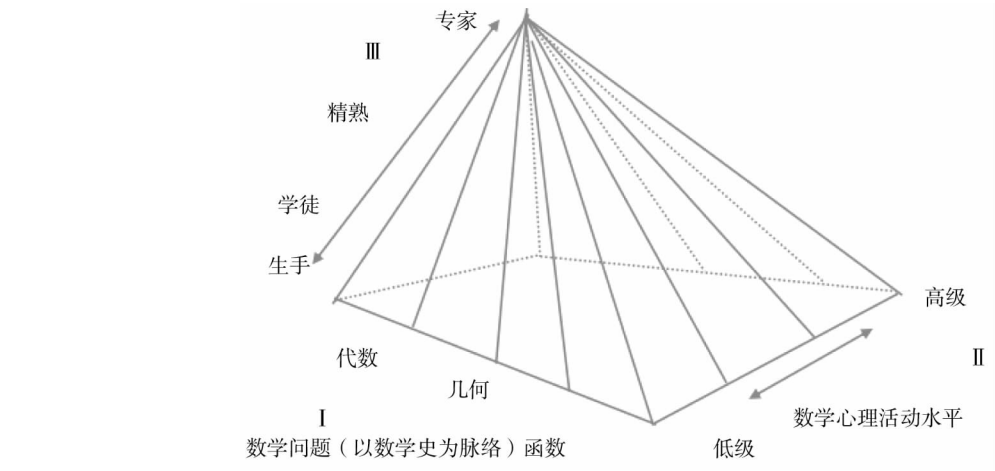


图1 “金字塔”模型

2.2 “金字塔”模型的内在关系

I,II,III 线段的关系,如图2 所示。

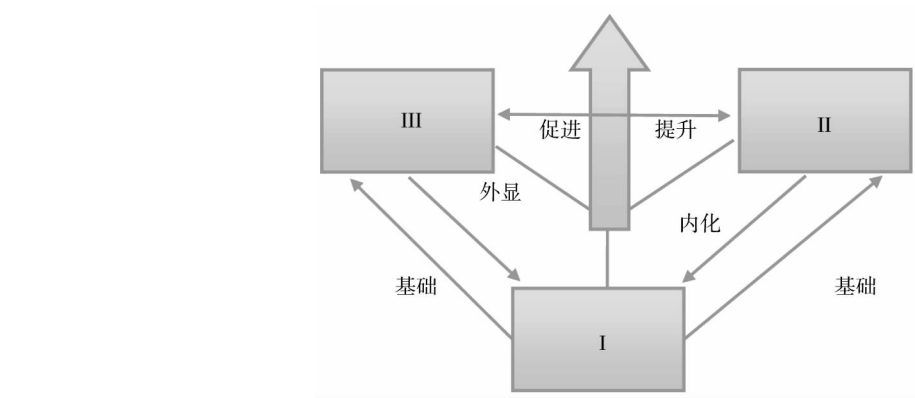


图2 “金字塔”模型的内在关系

由图2 的“金字塔”模型的内在关系可以看出,I,II,III 线段是统一的有机整体,但同时又是相对独立的。在整体上,三者互相交融,在数学问题解决过程中,学生在自学、合作学习及教师引导下,形成合力,达到“金字塔”模型之巅,有望成为数学问题解决的“专家”。从局部角度观察,I 线段是 II 和 III 线段的基础,数学知识(数与运算,图形与几何,方程与函数,无穷与极限,微分与积分)是按照数学史的发展脉络来编排,各级各类的数学问题是这些数学模块知识的载体。II 线段为 I 线段的内化,具体而言,就是在数学问题解决过程中,学生的数学心理活动内化于头脑中,并选择恰当的问题解决模式,通过一个或若干个算子,使问题的初始状态向最终目标状态推进,以完成数学问题解决。并在此基础上,反复训练问题解决能力,认知水平也由低级向高级发展,最终完成问题解决任务的目标。III 线段是 I 线段的外显,即在素质教育的背景下,按照新课标的学习指导与教学理念,让学生通过解决数学史取向的数学问题,习得数学问题解决的方法,并付诸实践,使学生实现由解题“生手”向解题“专家”转化。II 和 III 互为促进,共同提升。具体为:随着学生的数学心理活动水平越来越高,学生的解决问题能力也按照生手→学徒→精熟→专家的趋势发展;同样,学生解决问题能力的提高,也会提升数学心理活动水平<sup>[2]56-60</sup>。

### 3 影响“金字塔”模型的主要因素

影响学生形成并运用“金字塔”模型的因素大致可以分为内部因素和外部因素。

#### 3.1 外部因素

环境因素。包括社会背景、文化传统、课堂氛围、教师引导以及合作学习等,会影响到学生对问题的解决。

题型。选择题、填空题、简答题、分析题等类型。

问题的特点。即结构性、复杂性、动态性和专业性。

结构。每个问题都有自身的结构,这些结构包括问题的条件、陈述和结论等。

问题情境。一是可以结合数学史,将历史融入课堂教学;二是教师重现问题的形成过程,深入探究学生产生学习困惑或障碍的原因,营造新的问题情境,以激发学生解决问题的兴趣。

#### 3.2 内部因素

知识基础。即学生的先前知识及其表征。先前的知识经验有利于学生在适当的时候选择适当的策略、方法和算法。

解题策略。一是从宏观角度出发的一般性策略,如波利亚的“怎样解题表”,奥加涅相的解题4阶段论——理解条件,制定计划,实施计划,研究解答;二是从微观视角来分类,具体的数学思想方法,如分析与综合法、归纳与演绎法、公理化方法、数学结合思想、RMI原理等思想方法。

元认知。即认知主体对自身心理状态、能力、任务目标、认知策略等方面的认知。在数学问题解决过程中,元认知可以帮助学生监控和调节自己的认知进程,进而优化解题策略,并对认知过程进行反思和评价。

动机与信念。波利亚在《怎样解题》中认为,“解题若是纯粹的看作是一种智能活动是错误的,决心与情绪也起着很重要的作用。”<sup>[3]34-40</sup>学生具有良好的数学学习态度,可以促进数学问题的解决。匈菲尔德指出,“学生和数学家在数学问题解决中最大的差别就是信念。”教师将显性或隐性的数学史知识融入到问题解决当中,可以增强学生成功解决问题的信念。

#### 参考文献:

- [1] 鲍建生. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海:上海教育出版社,2009.
- [2] 邵光华. 作为教育任务的数学思想与方法[M]. 上海:上海教育出版社,2009.
- [3] 波利亚. 怎样解题[M]. 阎育苏,译. 北京:科学出版社,1982.

(责任校对 谢宜辰)