

doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2022.01.008

高中生函数核心概念认知水平测评分析

——基于结构化视角

时杰

(建平中学,上海 200135)

摘要:从结构化的视角自编一份函数核心概念测试卷,对上海市浦东新区J中学的高二和高三创新班学生进行测试。研究发现:整体上被测学生的函数核心概念认知水平较高,绝大多数达到了3水平或4水平;高三学生的认知水平显著高于高二学生;男生的认知水平显著高于女生;低认知水平的学生仅能处理简单的函数问题,不能系统地建构函数核心概念认知结构,而高认知水平的学生不仅具备良好的认知结构,而且体现出一定的探索与创新能力。究其成因,主要有教师教学、学生学习、教材设计三方面。

关键词:结构化;函数;核心概念;认知水平

中图分类号:G633.6

文献标志码:A

文章编号:1674-5884(2022)01-0046-07

1 问题的提出

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《新课标》)强调“依据数学学科特点,关注数学逻辑体系、内容主线、知识之间的关联”^[1],这就要求以联系、整体、发展的原则构建良好的数学认知结构,也就是用结构化的方式学习数学。正如美国著名认知心理学家和教育家布鲁纳(Bruner)所强调的,无论教师选教什么学科,务必使学生理解该学科的基本结构^[2]。结构化学习能够帮助学生掌握数学学科的基本概念架构,促进学习的迁移。北京师范大学林崇德教授更直言核心素养是一种结构化的学习能力。另一方面,数学学习最重要的是数学概念的学习,用结构化的方式学习数学概念,有助于以数学核心概念为“纲”,将相关概念统整为一个网络系统,达成“纲举目张”之效^[3]。当前教育界普遍认为函数是高中数学课程中的核心概念之一,但函数概念的抽象性使得高中生学习遇到了

巨大的困难。以结构化的方式学习函数核心概念,可以整体构建与函数有关的数学知识,形成知识系统,有助于提升学生的学习和研究能力,从而促进学生数学核心素养的连续发展。

基于以上分析,提出3个研究问题:(1)结构化视角下高中生函数核心概念的认知水平如何?(2)高二学生与高三学生的函数核心概念认知水平是否存在差异?男女生的函数核心概念认知水平是否存在差异?(3)不同认知水平的学生,其函数核心概念认知结构表现出怎样的特点?

2 理论基础

2.1 数学核心概念的界定

关于数学核心概念(Core Concept)的含义,学界并无定论,但是从众多的论述中可以发现,核心概念是数学概念体系的中心,具有超越具体知识的迁移价值,能够将各种数学理解有机联系形成一个连贯的整体,体现了基础性、本质性和统摄

收稿日期:2021-04-25

基金项目:上海市第四期“双名工程”攻关计划虞涛数学基地攻关课题(SMGC-201904-B55)

作者简介:时杰(1995—),男,江苏苏州人,中学二级教师,硕士,主要从事数学教育研究。

性。本研究参考邵光华^[3]以及王嵘、章建跃和宋莉莉^[4]等学者对数学核心概念的界定,同时结合实际需要,认为数学核心概念不仅仅指概念本身是什么,而是一个包含概念知识结构、思想方法和思维方式的观念群。核心概念,对数学学科而言,处于主干地位;对学生认知结构而言,以一种综合的心理图式的方式存在于学生的脑海之中,具有不可或缺的基础地位;在表现形式上,以核心概念的逻辑发展为主线,以网系结构呈现各子概念节点之间的联系;在教学价值上,注重数学核心概念的教学,其最终目的是用数学学科中少而精的概念促进学生对数学学科的深度理解,帮助学生获得数学核心素养。

2.2 认知水平的界定

2.2.1 布鲁姆教育目标分类

布鲁姆(Bloom)的教育目标分类学是认知水平分类中最具影响力的一种。布鲁姆等学者将认知目标由简单到复杂、由具体到抽象划分成六个层次,依次为知识、领会、运用、分析、综合和评价^[5],这是一个累进式层级分类系统,也就是说,学生只有掌握了低级的类别才有能力掌握高级的类别。

随着教育目标分类理论的发展,布鲁姆的学生安德森等人对原来的分类进行了修订,将原来的六个层次用动词命名,并对其顺序进行了调整,修改后的六个层次依次为记忆、理解、应用、分析、评价和创造^[6]。修订版的教育目标分类变成了复杂性渐进层级,且允许不同层级之间有重叠。

纵观两个版本的布鲁姆教育目标分类理论,从结构化的视角来看,两个版本的第一类别都关注最单一的、基础的知识;第二和第三类别都关注多点知识,但是缺乏知识间的联系与结构;第四类别开始关注要素与组成部分的联系,局部与整体的关系;第五和第六类别则上升至连贯的整体和完整的结构。

2.2.2 SOLO 分类理论

SOLO 是“可观察到的学习结果的结构”(Structure of the Observed Learning Outcome)的简写。SOLO 分类理论根据一个人对待某个问题的表现来判断这个人思维结构所处的水平,将一个人的思维结构从简单到复杂分为五个类别,依次为前结构、单点结构、多点结构、关联结构和拓展抽象结构^[7]。

SOLO 分类理论五种水平结构也是复杂性渐

进层级模型,每一层级所构造的维数数目逐渐增加,不少学者认为 SOLO 分类法适用于不同学科,且在测量学生认知成就中具有客观标准性^[8-9]。SOLO 分类理论也很好地体现了结构化的思想,每个层级由低到高逐步呈现学生思维结构从缺少联系到形成有机整体的过程。

2.2.3 国内认知水平划分的研究

国内对数学认知水平划分的研究也有很多。顾泠沅教授在布鲁姆的教育目标分类学基础上重新建立了包含计算、概念、领会和分析四个水平的数学认知水平分析框架^[10]。《新课标》给出了六个数学学科核心素养的三水平划分,并从情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思四个方面说明了学生数学学科核心素养的表现水平^[1]。《上海市高中数学学科教学基本要求(试验本)》中从识记、理解、运用、综合四方面给出了学科学习水平界定表^[11]。国内关于认知水平划分的研究,对布鲁姆教育目标分类学和 SOLO 分类理论进行了一定的拓展,重点表现在从原先主要关注知识结构化转变为多维度地关注情境结构化、思维结构化以及素养结构化。

3 研究方法

3.1 研究对象的选取

本研究选取函数作为高中数学核心概念进行研究。函数概念是中学数学教育的灵魂,《新课标》强调高中数学课程以函数为主线之一,高中数学课程中由函数概念生发出大量的子概念,在教学组织中具有纽带作用,可见函数概念在高中数学课程中的重要地位。且函数概念是学生未来进一步学习数学的基础,因此,将函数作为高中数学核心概念是合理的。

考虑样本选取的代表性与方便性,本研究中的测试卷调查对象为上海市浦东新区 J 中学高二和高三创新班学生,该所学校师资力量较强、生源较好,是浦东新区的优质校。以这所学校高二年级的一个创新班和高三年级的一个创新班学生作为样本,共发放测试卷 78 份,回收有效问卷 75 份。

3.2 测试工具的编制

为了从结构化视角下测评高中生函数核心概念的认知水平,首先绘制函数核心概念图(如图 1)。概念图是一种组织和表征知识结构的网络图表,包含概念、概念间的意义联系以及层级。概

念图的绘制遵循以下基本原则:(1)中心性,以函数概念为概念图的核心;(2)关联性,尽可能包含与函数核心概念相关的概念;(3)层级性,参考《新课标》中函数主线的内容,建构概念图中的层

级结构。第1层为函数核心概念,第2层为表示方法、分类和概念,第3层为基本初等函数,第4层为基本性质和运算,第5层为运用,层与层之间为逐级递进关系。

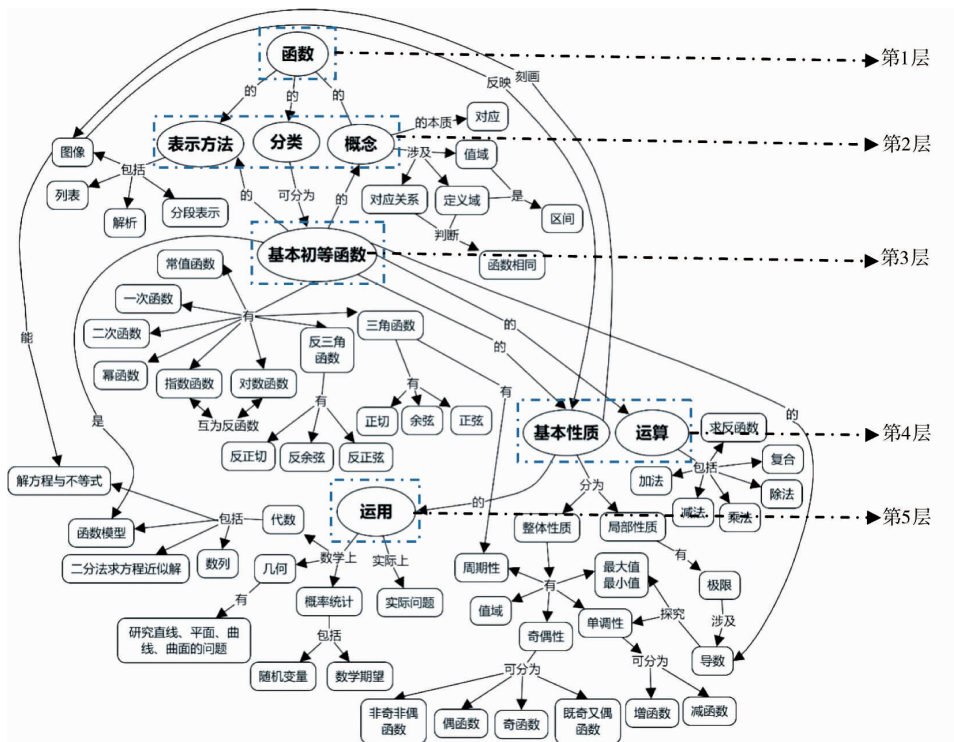


图1 函数核心概念图

基于上文对认知水平划分的综述,结合函数核心概念图的层级结构,主要参考 SOLO 分类理论,按照学生顺利解答测试题所需要的认知水平层次将测试题分为4个水平。1水平的题包含的概念主要与概念图的第2层有关,旨在测试学生对函数核心概念认知的基础性;2水平的题包含的概念主要与概念图的第3层有关,旨在测试

学生对函数核心概念认知的全面性;3水平的题包含的概念主要与概念图的第4层有关,旨在测试学生对函数核心概念认知的关联性;4水平的题包含的概念主要与概念图的第5层有关,旨在测试学生对函数核心概念认知的拓展性。最终得到函数核心概念认知的4个水平划分,见表1。

表1 函数核心概念认知水平的划分

认知水平	操作定义	概念图相关层级
1水平	试题的情境素材为学生所熟悉,题干呈现的知识点单一,涉及概念数量少,正确解答只需回忆再现一个或两个基本概念,或者进行简单的认识、计算便可解决问题	第2层
2水平	试题的情境素材为学生所熟悉,题干呈现的知识点为2至3个,但相互独立,涉及概念数量增加,正确解答须回忆再现三个及以上概念,但无须掌握概念间的综合运用	第3层
3水平	试题的情境素材具有关联性,涉及概念数量较多,正确解答需确定各部分之间的相互关系以及与函数核心概念的关系,形成一个结构,从整体上把握解题思路,分析、归纳答案	第4层
4水平	在3水平的基础上,问题情境陌生新颖且更为综合,可能存在陌生概念,正确解答不仅需全方位、多层次、多角度地把问题分解成各个组成部分,将相关知识点和题干信息综合形成一个结构,还需进行合理的假设与猜想,进而拓展到新的领域	第5层

为了考察高二、高三学生函数核心概念的认知水平,依据表 1 中的函数核心概念认知水平划

分,从结构化的角度编制一份函数核心概念测试卷,每个水平层次编制 4 道测试题,见表 2。

表 2 函数核心概念测试卷题目说明

认知水平	例题	例题说明
1 水平	求函数 $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$ 的定义域	涉及函数定义域概念,知识点单一
2 水平	已知两个变量 x, y 之间关系为 $\lg(y - x) = \lg y - \lg x$, 求以 x 为自变量的函数 y 的最小值	涉及对数函数、对数运算与最小值概念,概念增多且相对独立
3 水平	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若对于任意的 $x, y \in D$, 都有 $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$, 请写出一个满足条件的函数	出现抽象函数的表达式,需要与具体函数建立关联
4 水平	对于函数 $y = f(x)$ 与常数 a, b , 若 $f(2x) = af(x) + b$ 恒成立, 则称 (a, b) 为函数 $f(x)$ 的一个“ P 数对”。设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(1) = 3$ 。若 $(-2, 0)$ 是 $f(x)$ 的一个“ P 数对”, 且当 $x \in [1, 2)$ 时, $f(x) = k - 2x - 3 $, 求 $f(x)$ 在区间 $[1, 2^n)$ ($n \in N^*$) 上的最大值与最小值	出现新定义的概念,需要全面把握新的概念并进行合理的假设猜测才能解决问题

除此之外,为了考核学生的函数认知综合水平,额外增加了一道研究型试题:

已知函数 $f_n(x) = \sin^n x + (-1)^n \cos^n x, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 其中 n 为正整数。请你给 n 规定一个你认为最具有挑战性的值或者范围,并求出函数 $f_n(x)$ 的最大值和最小值。

本题根据学生的作答情况,同样划分为表 1 中的 4 个水平。

为了检验测试卷是否覆盖概念图中所涉及的大部分概念,统计测试卷中各水平测试题出现的概念数和相应概念图层级出现的概念数,两者相除,得出覆盖率,见表 3。由表 3 可知,整套测试卷对概念图各层级概念的覆盖率均超过 57%,覆盖了大部分内容。

表 3 函数核心概念测试卷的覆盖率

计数项	个数	覆盖率/%
1 水平测试题概念数	7	70.0
概念图第 2 层概念数	10	
2 水平测试题概念数	8	57.1
概念图第 3 层概念数	14	
3 水平测试题概念数	12	70.6
概念图第 4 层概念数	17	
4 水平测试题概念图	3	60.0
概念图第 5 层概念数	5	

对此测试卷进行专家咨询,邀请了 9 位中学数学教师对测试题与测试水平的一致性进行评判,评判结果如表 4。在表 4 中可以发现,每个

水平的测试题均有 77% 以上的教师作出了一致的评判,因此,整份测试卷的一致性程度较高。

表 4 函数核心概念测试卷的专家咨询结果

认知水平	赞同频数	百分比/%
1 水平	9	100
2 水平	8	88.9
3 水平	7	77.8
4 水平	9	100

3.3 正式测试与评分标准

测试卷由数学教师分发给学生作为回家作业完成。为保证测试卷评分的一致性,测试卷由研究者独立评分。完全答对每个水平中的 3 道及以上测试题,即可认为达到该水平。在评判认知水平的过程中,忽略学生的计算错误、笔误等问题,主要关心学生对概念本身的理解是否存在错误以及是否具备进一步研究的能力。

3.4 数据分析与处理

依据评分标准,每个学生会被判为某个水平,通过统计每个水平的人数和百分比分析高中生函数核心概念的认知水平整体状况;利用 χ^2 检验分析不同学段、不同性别学生的函数核心概念认知水平是否存在差异。

4 研究结果

4.1 结构化视角下高中生函数核心概念认知水平层级较高

研究结果显示,75 份测试卷中,有 1 位学生

没能达到1水平和2水平,但是3水平的测试题全对,故考虑将此学生列为特殊学生,单独分析此份测试卷,因此在数据分析时剔除此份测试卷。高中生函数核心概念的认知水平整体状况如表5所示。可以看出,大部分被测学生的函数核心概念认知水平达到了3水平甚至4水平,由此反映出学生较好地掌握了函数核心概念。

表5 高中生函数核心概念认知水平整体状况

认知水平	频数	百分比/%
1水平	4	5.4
2水平	16	21.6
3水平	27	36.5
4水平	27	36.5

4.2 函数核心概念认知水平存在学段差异

虽然从整体而言,所测学生的函数核心概念认知水平较高,但是1水平的4名学生均来自高二,而达到3水平的学生有59.3%来自高三,达到4水平的学生有92.6%来自高三,因此考虑利用 χ^2 检验分析高二学生与高三学生在函数核心概念认知水平上的差异,结果显示, $\chi^2 = 38.707, p = 0.000 < 0.05$,表明高二学生与高三学生在函数核心概念认知水平上存在显著性差异,高三学生的认知水平高于高二学生。

4.3 函数核心概念认知水平存在性别差异

性别差异一直是教育研究关注的热点。因此接下来分析不同性别学生在函数核心概念认知水平上的差异性。达到3水平的学生有55.6%是男生,达到4水平的学生有85.2%是男生。因此,针对不同性别学生的函数核心概念认知水平做了 χ^2 检验,结果显示, $\chi^2 = 8.354, p = 0.035 < 0.05$,表明男女生在函数核心概念认知水平上存在显著性差异,男生的认知水平高于女生。

4.4 不同认知水平学生的函数核心概念认知结构特点

测试卷作答情况表明,1水平和2水平的学生对于函数核心概念以记忆为主,能够处理简单的一次函数和二次函数问题,善于解决有具体函数表达式的问题,但是这类学生没有很好地建构起函数核心概念的认知结构,对函数的概念、性质等的认知是零散的、不成结构的,面对抽象的函数表达式,往往无法与具体的函数进行有效联系,且对于陌生的情境缺少基本的分析、类比、推断能力。3水平的学生建构起了一定的函数核心概念

认知网络,能够有效地整合题干中的信息,形成一个结构,但是缺少探索和发现能力。4水平的学生突出的特点在于其不仅能有效地建立起函数核心概念的整体结构,还能在陌生的情境中从特殊到一般地进行归纳推理,具备较强的创新性。不仅如此,4水平的学生在解决研究型试题时表现出更高的数学素养,主要体现在利用高等数学解决问题。对于测试中发现的唯一一位特殊学生,分析其作答情况发现,其做对的3水平的测试题均与三角函数有关,而1水平和2水平的测试题与三角函数无关,其可能对与三角函数有关的内容建立起了良好的认知结构,而没能对其他函数内容形成良好的认知结构。

5 分析与讨论

基于测试得出的以上结论,有许多成因,主要有教师教学、学生学习、教材设计等方面的。

5.1 教师教学方面的成因分析

研究发现,绝大多数学生的函数核心概念认知水平达到了3水平或4水平,这表明创新班学生对函数概念的认知是较为优异的。整体而言,学生在基础的函数问题上表现较好,这表明学生函数的基础知识和基本技能较为扎实,但是学生在涉及抽象的函数表达式和研究型试题上的表现一般。注重数学“双基”教学一直是我国数学教育的传统,教师们围绕“双基”发展出了诸如“变式训练”“精讲多练”等教学方式^[12],但是过分强调“双基”又弱化了学生更高层次的创新,因此,学生表现为对解题很在行,而面对一些开放或者需要探究的问题时束手无策。函数核心概念的教学是一个整体,教师教学过程中应注重把握函数核心概念的本质,突出函数思想,引导学生建立函数核心概念与其他概念之间的联系。“双基”的训练必不可少,但是要想学生达到函数核心概念的高认知水平,教师还需要提供一些非常规、情境性和开放性的高认知水平数学任务,让学生在任务中主动探索和理解函数核心概念的本质,进而发展高层次的思维和推理^[13]。

5.2 学生学习方面的成因分析

研究发现,随着学段的上升,学生函数核心概念的认知水平出现了较大的提升,这一研究结论与濮安山等人的发现一致^[14]。一方面,随着学段的上升,学生的认知逐步得到发展,对函数核心概

念有了更深刻的认识,原先对函数概念认知的片面性得到一定的纠正;另一方面,本研究选取的高三学生已经经过高强度的复习,高三的复习更加注重建立完善的函数核心概念知识体系和认知结构,学生通过复习对函数核心概念进行了全面的整合与梳理,加强了知识间的纵横联系,构建了完整的函数概念网络。在性别层面,男生比女生表现优异,尤其体现在高水平的认知上。男生在函数核心概念的结构建构上优于女生,女生更多的是停留在对函数核心概念的感性认识和理解水平层面^[15]。这一点在TIMSS2015研究中也有所体现,男生表现优于女生,尤其在推理方面优势明显^[16]。关于性别上的差异,很难有一个非常完美的解释,但是无论如何,我们需要做的是加强对性别差异的研究,科学地利用研究成果为不同性别的学生提供有针对性的数学教育,以促进学生的全面发展。

5.3 教材设计方面的成因分析

有研究表明,初中和高中教材对学生的函数概念认知具有显著的影响^[17],因此,中学数学中函数课程设计与学生函数核心概念的认知水平有着密不可分的关系。函数概念的学习过程是一个较长的过程,学生早在初中就学习过函数的概念,到了高中需要进一步理解变量之间的对应关系,函数概念本身的复杂性和发展性是造成学生对函数核心概念产生认知困难的重要原因之一^[18],所以做好初高中教材中函数内容的衔接至关重要。当前我国高中教材大部分先谈函数概念是什么,然后在这个一般概念的引领下研究函数的基本性质,最后研究具体的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等。这样的一种编排顺序无形中增加了学生的认知负担。沪教版新教材在这一方面作了一定的探索,打破原有的顺序,遵循从特殊到一般再由一般指导特殊这样的认知规律,将幂函数、指数函数与对数函数放在函数概念、性质与应用之前,引导学生回顾初中函数的研究方法,为函数一般概念的形成打下基础。

6 研究不足与展望

本研究只选取了一所优质校的创新班学生作为测试对象,因此,研究结论只适用于同等层次的学生,对于普通班学生的测试结果可能会有所不同。此外,测试样本数量较少,对于特殊学生的分

析还不够全面,有待进一步大样本调查,并对特殊学生进行访谈分析,以了解其函数核心概念的认知水平。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 布鲁纳. 教育过程[M]. 邵瑞珍,译. 北京:文化教育出版社,1982.
- [3] 邵光华,章建跃. 数学概念的分类、特征及其教学探讨[J]. 课程·教材·教法,2009(7):47-51.
- [4] 王嵘,章建跃,宋莉莉,等. 高中数学核心概念教材编写的国际比较——以函数为例[J]. 课程·教材·教法,2013(6):51-56.
- [5] BLOOM B, ENGLEHART M, FURST E, et al. Taxonomy of Educational Objectives: Handbook I: Cognitive Domain[M]. New York: McKay, 1956.
- [6] ANDERSON L W, KRATHWOHL D R, AIRASIAN P W, et al. A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives[M]. New York: Longman, 2001.
- [7] BIGGS J. Assessing for Learning: Some Dimensions Underlying New Approaches to Educational Assessment[J]. The Alberta Journal of Educational Research, 1995(1):1-17.
- [8] CHICK H. Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and SOLO Taxonomy[J]. Mathematics Education Research Journal, 1998(2):44-26.
- [9] LAKE D. Helping Students to Go SOLO: Teaching Critical Numeracy in the Biological Sciences[J]. Journal of Biological Education, 1999(4):191-198.
- [10] 周超. 八年级学生数学认知水平的检测与相关分析[D]. 上海:华东师范大学,2009.
- [11] 上海市教育委员会教学研究室. 上海市高中数学学科教学基本要求(试验本)[M]. 上海:华东师范大学出版社,2017.
- [12] 熊丙章,黄翔. “四基”对高中数学课标修订的启示[J]. 中学数学教学参考,2016(Z1):2-4.
- [13] 袁志玲,陆书环. 高认知水平数学教学任务的教学意义及启示[J]. 数学教育学报,2008(6):37-40.
- [14] 濮安山,史宁中. 从APOS理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报,2007(2):48-50.
- [15] 谷晓沛,马云鹏,朱立明. 高一学生函数概念数学理解水平的实证研究——以T城市为例[J]. 数学教育学报,2018(3):25-29.
- [16] 陈亚萍,曾小平. TIMSS2015对高中生数学认知的

- 评价研究[J]. 数学通报, 2020(7):8-11. 84-87.
- [17] 任明俊, 汪晓勤. 中学生对函数概念的理解——历史相似性初探[J]. 数学教育学报, 2007(4): [18] 钟志敏, 李士琦. 高一学生函数对应关系的理解的研究[J]. 数学教育学报, 2010(1):33-36.

Assessment of Senior High School Students' Cognitive Level of Core Concepts of Function Based on Structured Perspective

SHI Jie

(Jian Ping High School, Shanghai 200135, China)

Abstract: A function core concept test paper is compiled from a structured perspective, which is used to test senior high school students from J school in Pudong, Shanghai. The study finds that the students tested have high cognitive levels of core function concepts, with the majority reaching level 3 or level 4; seniors have significantly higher cognitive levels than sophomores; the cognitive level of boys is higher than that of girls; students with low cognitive level can only solve simple function problems, and they are unable to construct cognitive structure systematically, while students with high cognitive level show more exploration and innovation. Teachers' teaching skills, students' learning ability as well as the teaching material design are the causes of the phenomenon.

Keywords: structure; function; core concepts; cognitive level

(责任校对 龙四清)