第 12 卷 第 4 期 当代教育理论与实践 Vol.12 No.4
2020 年 7 月 Theory and Practice of Contemporary Education Jul. 2020

doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2020.04.001

数学观察能力的应用策略案例探析

——以高中排列组合复习课为例

刘金旺,刘慧琳,李冬梅
(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:中学数学解题教学观察是教学观察中一种具体类型。排列组合问题是高中数学中的一个难点,在解答这类问题时,首先必须仔细观察和分析问题的条件与细节,根据是否存在顺序关系,判断问题的类型是属于排列还是组合;其次要把握问题的本质特征,采用合理、适当的方法来观察处理问题。本案例总结了 12 种常用解排列与组合题的观察策略。

关键词:解题观察力;排列与组合;应用与培养
中图分类号:G633.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1674-5884(2020)04-0001-05

观察是一种人类对周围出现的事物或现象进行有目的的考察所表现出来的心理现象,先进行全面而深入的察看,并根据该事物或现象的真实面貌来探究和确定它们的性质和关系[1]。在人类理解事物的过程中,感知和知觉是最为基本的形式,而观察作为这个过程中的高级状态,表现为一种主动的、感知性的活动,在人的思维中发挥着积极的作用。观察是理解事物的前提条件,是训练思维的有效途径。在数学教学活动中的观察,则是指观察由符号、字母、数字或文字所表示的数学关系式、命题、问题,以及图表、图像、几何图形的结构特点,例如,从复杂图形中找出某个特殊图形;从代数式或方程组中找出相关系数与指数之间的特定关系;从推理过程或从一些数学内容中找到某种逻辑关系[2]。所有上述观察都需要学生认真、仔细、周密,要求做到同中求异,异中求同。

1　背景信息

2018 年上学期,笔者就数学师范教育深入湘潭市五所高中进行专题调研,师生普遍认为数学解题中观察能力的培养和应用十分重要。为此,笔者于 2018 年下学期在湘潭市一中高三理科班讲授了一堂题为“解答排列组合题的观察策略”的公开课。该班有 50 名学生,属于平行班级。排列组合是普通高中选修 2-3 中的内容,要求通过对实例的分析,使学生理解和掌握排列与组合的概念,能够使用计数原理来推导排列数及组合数公式,并解决简单实际问题[3]。排列与组合题在高中数学题中十分常见,然而很多学生做不出相关题目,主要原因是解题观察能力较差。

开展此次高中排列组合复习公开课的目的是有效培养学生解题的观察能力,让学生学会如何掌握解题的观察性、目的性、有序性、方法性、完整性等,学会构建解题建模思想,掌握若干方法与技巧,养成一种良好的思维习惯,不断提升数学水平,同时也为数学师范教育工作做出新的贡献。

收稿日期:20191219
基金项目:湖南省 2019 年普通高校教学改革研究项目(2019-291-477)
作者简介:刘金旺(1964-),男,湖南常德人,教授,博士,主要从事代数与符号计算研究。

2　12 种常用解排列组合题的观察策略的课堂主录

数学教育家弗赖登塔尔提出“现实数学”的教育理念，他强调关注数学问题被学生从客观现象中提出和解决的能力[4]。教育心理专家一致认定人的观察力是智力的一个重要方面。本教学案例列出 12 种常用解答排列与组合题的观察策略，来证实师生解题观察力的有效应用与培养。

2.1　特殊元素和特殊位置观察策略

案例一：用 0 到 5 这 6 个数字组成无重复的 5 位数奇数有多少种情况？

分析过程：对于该 5 位数奇数，其末位和首位都有特殊要求，即末位必须为奇数，首位不能为 0，应优先考虑；后再考虑中间的 3 个数的排列情况。如图 1 所示，符合条件的末位数字有 C_3^1 种情况，首位数字有 C_4^1 种情况，剩余中间 3 个位置共有 A_4^3 种情况。由分步计数原理得所有排列情况有 $C_4^1C_3^1A_4^3=288$ 种。

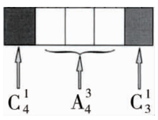

图 1　5 位数奇数各位置数字排列示意图

解题要点：当排列组合问题中出现特殊元素和特殊位置时，需对它们进行优先安排，以避免这些位置被不期望的元素占据，而后再处理其他元素或位置，必要时需兼顾多个约束条件。

2.2　相邻元素捆绑观察策略

案例二：2 名高一学生、2 名高二学生和 3 名老师站成一排表演诗朗诵，其中高一学生相邻且高二学生相邻，共有多少种不同的排法？

分析过程：如图 2 所示，分别设 2 名高一学生和 2 名高二学生为甲乙和丙丁，先将甲乙和丙丁都捆绑为一个整体与 3 名老师进行排列，有 A_5^5 种情况；再分别对甲乙和丙丁进行内部排列，有 A_2^2 种情况。由分步计数原理可得共有 $A_5^5A_2^2A_2^2=480$ 种不同的排法。

图 2　相邻学生与老师站位排列示意图

解题要点：在排列组合问题中常常出现需要将某些元素排列在一起的情况，可采用捆绑法来解决。即将相邻元素捆绑在一起作为一个元素，然后与其他元素一起排列，需要注意是捆绑后的元素其内部也需进行排列。

2.3　不相邻问题插空观察策略

案例三：某学校举行元旦晚会活动，节目单包括 5 个班级大合唱、2 个情景剧和 4 个舞蹈节目，由于时间关系，班级合唱节目不能连续出场，则节目的出场顺序有多少种？

分析过程：先排情景剧和舞蹈节目，共有 A_6^6 种排列；然后将 5 个合唱节目插入情景剧和舞蹈节目间的 7 个空位（包含首尾），共有 A_7^5 种。由分步计数原理，得出该晚会的节目出场顺序共有 $A_6^6A_7^5$ 种。

解题要点：当问题条件中有要求将元素进行隔离时，可以优先排列无位置要求的元素，后将不相邻的元素插入所形成的空位即可。

2.4　定序问题倍缩空位插入观察策略

案例四：将 7 种商品摆放在超市的一排货架上，其中 ABC 三种商品需按此固定的顺序排列，问共有多少种不同的摆放方法？

分析过程：该问题有三种解决方法。

倍缩法：先将 7 种商品都排列在一起，用排列的总数除以 ABC 三种商品的全排列数，则排法种数为 A_7^7/A_3^3 种。

空位法：将无顺序要求的 4 种商品安排在 7 个空位上，共有 A_7^4 种排法，剩余 3 个空位给 ABC 共 1 种排法，则共有 A_7^4 种排法。

插入法：在 7 个空位上，ABC 三种商品的排法共 C_7^3 种，再插入其余 4 种商品进行全排列有 A_4^4 种，则共有 $C_7^3A_4^4$ 种排法。

解题要点：采用倍缩法可以很好地解决定序问题，即用排列总数除以定序元素的全排列数。除此之外，也可将问题转化为占位或插空模型来处理。

2.5　重排问题求幂观察策略

案例五：某邮局有 4 个信箱，现有 5 封信需要邮寄，共有多少种不同的投递方法（　）

A.4^5　　B.5^4　　C.C_4^5　　D.A_4^5

分析过程：同一信箱可以重复投入多封信，也可以为空，因此完成这件事共分五步。投递第 1 封信有 4 种方法，投递第 2 封信也有 4 种方法……依此类推，由分步计数原理可得共 $4\times4\times4\times4\times4=4^5$ 种投递方法，答案为 A。

解题要点:重排问题即重复排列问题,是指允许有重复出现的元素,因此,每个元素的位置可以一一排列,通常无限制地安排在 a 个位置上的 b 种不同的元素排列数为 a^b 种。

2.6　多排问题直排观察策略

案例六:

类型 1 多排可直接化为直排:小组 8 人平均坐成两排汇报实验结果,其中组长甲与副组长乙坐在前排,小组记录员丙坐在后排,共有多少种不同坐法?

分析过程:如图 3 所示,可将 8 人排成一排,先排 2 名组长甲乙,有 A_4^2 种排法;再排记录员丙有 A_4^1 种排法;其余的 5 人任意排列有 A_5^5 种排法。由分步计数原理共有 $A_4^2A_4^1A_5^5$ 种排法。

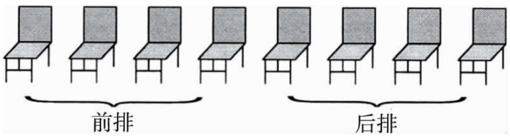

图 3　前后两排座位化为一排排列示意图

类型 2 直排后存在实际不相邻情况:在一次讲座活动中,前后排分别有 11,12 个座位,需空出前排中间的 3 个座位,现安排两名学生分开就座(即彼此不相邻),有多少种不同的排法[5]?

分析过程:依题意,去掉不可坐的 3 个座位后实际可坐的座位共有 20 个,两名学生就座有 A_{20}^2 种坐法,其中包含了两人相邻的情况;再将这 20 个座位排成一排(DE 相连),如图 4 所示,将任意相邻两个座位视为一个整体,则这两人相邻的坐法有 $A_{19}^1A_2^2$ 种,需从总数中减去;而这其中又包括了实际不相邻的两种情况(B 与 C 不相邻,D 与 E 不相邻),还应加上 $2A_2^2$。因此,不同排法的种数为 $A_{20}^2 - A_{19}^1A_2^2 + 2A_2^2 = 346$ 种。

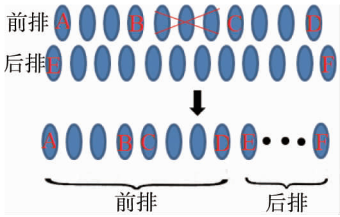

图 4　直排后出现实际不相邻排列情况示意图

解题要点:多排元素排列的问题通常可简化为一排考虑,然后分段进行研究。但在这其中需要注意的是,多排转化为一排后会存在实际不相邻的情况(如前后排的首尾是不相邻的,将其拉成一排则首尾相连),因此解决此类问题时,需仔细观察实际情况。

2.7　排列组合混合问题先选后排观察策略

案例七:将 5 本不同的书分给 4 人,每人至少一本书,共有多少种不同的分法?

分析过程:选取 2 本书视为一个整体,共有 C_5^2 种方法;然后将这 1 个整体元素和剩余 3 本书分给 4 个人有 A_4^4 种方法。根据分步计数原理,共有 $C_5^2A_4^4$ 种分书方法。

解题要点:面对排列组合混合问题时,可先选出组合的元素再进行排列,能更好地解决问题。

2.8　小集团问题先整体后局部观察策略

案例八:用 1,2,3,4,5 组成一个五位数,要求数字无重复且 1,3 之间恰有两个偶数,满足条件的五位数有多少种[6]?

分析过程:两偶数 2,4 恰在 1,3 之间,即 1,2,3,4 需作为一个小集团,将集团元素与剩余元素 5 进行排列,共有 A_2^2 种排法;而对于该小集团其排列方法有 $A_2^2A_2^2$ 种。由分步计数原理,共有 $A_2^2A_2^2A_2^2$ 种排法。

解题要点:由整体到局部观察处理小集团排列问题,后再结合其他策略。

2.9　元素相同问题隔板观察策略

案例九:某高一年级共有 7 个班,现有 10 个三好学生评选名额,若每班至少评得 1 名三好学生,有多少种分配方案?

分析过程:如图 5 所示,视评选名额为相同的 10 个元素,将其排成一排,相邻元素之间形成 9 个空隙,要将 10 个元素分成 7 份,只需在 9 个空隙中插入 6 个隔板即可。因此一共有 C_9^6 种分法。

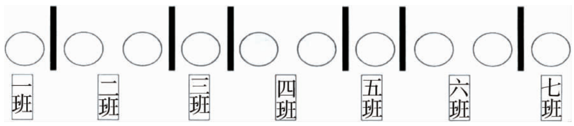

图 5　相同名额元素隔板插空排列示意图

解题要点:对于相同元素分配问题,可将其排成一排采用隔板法处理。如将 a 个相同的元素分成 b 份,每份至少一个元素,先将元素排成一排,则相邻元素形成($a-1$)个空隙,再在其中插入($b-1$)块隔板,所有分法数为 C_{a-1}^{b-1}。

2.10　“至少”“至多”问题排除观察策略

案例十:从 4 名男同学和 5 名女同学中任选

3 人回答问题,其中,男生和女生至少各 1 人,则不同的选法共有(　　)

A.140 种　B.80 种　C.70 种　D.35 种

分析过程:可从正向和反向两个方向思考。

正向思考:男生和女生至少一人有两种情况:男生 1 名女生 2 名;男生 2 名女生 1 名,故不同的选法有 $C_5^2C_4^1 + C_5^1C_4^2 = 70$ 种。

逆向思考:男生和女生至少一人的反面就是只选男生或女生,故不同的选法共有 $C_9^3 - C_4^3 - C_5^3 = 70$ 种,选 C 。

解题要点:在面对“至少”“至多”排列组合问题时,排除法会使问题更为简单明了。这类问题从正面考虑往往比较复杂,这时可求出它的反面,再从整体中排除。

2.11　平均分组问题除法观察策略

案例十一:将 6 人平均分成 3 组共有多少分法?

分析过程:每次选 2 人,分 3 步得 $C_6^2C_4^2C_2^2$ 种分法,由于分步分组时有一个先后顺序,便对同一种情况进行了重复计数。如设这 3 组分别为 A,B,C,那么对于(ABC)这种分法,在 $C_6^2C_4^2C_2^2$ 中有(ACB),(BCA),(BAC),(CAB),(CBA)与其属于同一种情况,每种分法有 A_3^3 种重复计数情况,故共有 $C_6^2C_4^2C_2^2/A_3^3$ 种分法。

解题要点:在平均分组问题中,其排列的先后顺序不同,但都为同一种情况,所以在均分组后,要除以均分组数(n 组)的全排列数 A_n^n,以避免重复计数。

2.12　复杂问题穷举观察策略

案例十二:方程 $ay = b^2x^2 + c$ 中的 $a,b,c \in \{-3,-2,0,1,2,3\}$,其中 $a \neq b \neq c$,在方程所表示的所有曲线中,有多少条不同的抛物线(　)

A.60 条　B.62 条　C.71 条　D.80 条

分析过程:先将方程 $ay = b^2x^2 + c$ 变形,得 $x^2 = \frac{a}{b^2}y - \frac{c}{b^2}$,由抛物线的性质可知 $a \neq 0, b \neq 0$,因此 a,b 有-3,-2,1,2,3 这 5 种取值情况:

$$(1)\ 若\ b=-3,\begin{cases} a=-2,c=0,1,2,3 \\ a=1,c=-2,0,2,3 \\ a=2,c=-2,0,1,3 \\ a=3,c=-2,0,1,2 \end{cases}$$

$$(2)\ 若\ b=3,\begin{cases} a=-2,c=0,1,2,-3 \\ a=1,c=-2,0,2,-3 \\ a=2,c=-2,0,1,-3 \\ a=-3,c=-2,0,1,2 \end{cases}$$

以上两种情况下,抛物线有 9 条是重复的,故共有 16+7=23 条;同理可列出,当 b=-2,或 2 时,共有 23 条;当 b=1 时,共有 16 条。综上,共有 23+23+16=62 种。

解题要点:对于复杂条件下的排列组合问题,按公式计算不容易,使用穷举方法或绘制树形图则会化难为易得到清晰的结果。

3　数学观察能力的应用与培养思考

3.1　感知解题过程,培养观察的关注性

解题过程是一个概念操作和思维操作的过程。学生在解题时要先明确题目背后的概念或原理,并理清概念或原理之间的联系,用清晰的思维来描述分析解决问题的详细过程。在观察问题时需注意:(1)要确定观察的目的,即要得到一个什么样的观察结果,使注意力围绕目标任务进行;(2)在观察时要注意区分对象和背景,以便对事物有更清晰的了解;(3)由整体到局部观察学习对象,从整体认识再到各部分之间的联系,并建立对有关学习对象的一个清晰框架;(4)在观察过程中,把握对象的本质特征,对概念有正确认识;(5)将观察得出的结果保存在长时记忆中,并且对各环节做好记录;(6)提高观察品质,培养观察兴趣,坚持观察习性。

3.2　激发学习兴趣,培养观察的习惯性

兴趣是一种具有倾向性的、表现最为直观和活跃的心理特征。托尔斯泰说过,成功的教学需要学生的兴趣。当学生对某种事物感兴趣时,他们会积极主动地去观察和探索它,从而理解事物的本质特征。

在中学数学问题解决教学中,激发学生观察问题的兴趣并不难,但对解题的观察形成长期的兴趣且自然形成一种习惯并不容易。培养积极的探究精神和良好的观察习惯,比掌握众多的学术知识更重要。当学生或教师对观察有了浓厚的兴趣,并已形成一种习惯,他们在解题过程中所遇到的种种困难和阻碍都能迎刃而解,并将观察进行到底。

3.3　注重学习策略,培养观察的方法性

在中学数学解题教学之前,首先要求学生进

行必要的知识准备。例如，学生在学习排列组合一章中的乘法原理时，应事先熟悉加法原理及解题策略，只有这样，当解题需要用到乘法原理时，他们对于问题的观察、比较及学习会得到一个更好的效果[7]。其次，教师要指导学生循序渐进地进行观察。一些中学生解题时，容易被自己感兴趣的事物所吸引，从而忘记原本观察的目的和任务，因此，教师有必要引导学生的程序性观察。再次，要引导学生在观察时对问题加以区分和思考。良好的观察品质有助于学生发现细小而有价值的事实，教师要引导学生动脑筋思考，并注意每个微小细节，对其提出问题并尝试解答问题。最后，应引导学生做好观察和总结工作。总结的形式可分书面和口头的，除了书面记录外，书面观察结果和结论还可以附有图表、图样。

参考文献：

[1] 朱从朴. 浅谈数学教学中学生观察力的培养[J]. 数学学习与研究,2012(24):4.

[2] 倪云志. 谈数学教学中对学生观察能力的培养[J]. 中学数学教学参考, 1995(6):14-15.

[3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学新课程标准[S].北京:人民教育出版社,2017.

[4] 李洋. 基于弗赖登塔尔的理论视角分析数学核心素养的培养[J]. 数学学习与研究(教研版), 2018(6): 80.

[5] 何小亚. 中学数学教学设计案例精选[M].北京:科学出版社,2011.

[6] 中华人民共和国教育部.普通高中课程标准实验教科书数学选修 2-3A 版[M].北京:人民教育出版社,2007.

[7] 李重庚. 解题贵在观察——以中学数学题为例[J]. 湖南教育,2015 下(12):56-58.

Study on Application Strategy of Mathematical Observation Ability:

Taking Review Class of Permutation and Combination in High School as an Example

LIU Jinwang, LIU Huilin, LI Dongmei

(School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: The observational skill in mathematics problem-solving is one of the specific teaching methods in high schools. When solving permutation and combination problems, which are difficulties of high school mathematics, it is necessary to carefully observe and analyze the conditions and details of the problems first, and judge whether the type of the problem belongs to permutation or combination according to the order relation. Second, it is of necessity to grasp the essential characteristics of the problems and adopt reasonable and appropriate methods to deal with the problems. This paper summarizes twelve kinds of common observation strategies for solving permutation and combination problems.

Key words: observational skill in problem-solving; permutation and combination; application and cultivation

（责任校对　王菊英）