

# 基于最优尺度回归分析的中学生 数学能力调查分析

——以宜章一中为例

肖洵<sup>1,2</sup>, 尹湘锋<sup>2</sup>, 肖鑫<sup>1</sup>

(1.宜章县第一中学, 湖南 郴州 424200; 2.湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:**当今教育的三个板块为知识、技能和素养,而数学教育作为中学教育的一大模块,对数学能力的研究应该更全面、更深入。在教育实践中,要想发展中学生的数学能力,必须立足实际,了解高中生数学能力的现状和发展情况,这对数学课程改革和教育教学都具有指导性意义。利用文献法,对数学能力的成分与结构进行界定,并选取9种数学能力,根据界定情况设计问卷;针对问卷数据,结合统计方法,利用最优尺度回归分析方法研究中学生数学能力发展的近况及其影响因素,根据分析结果提出提高中学生数学能力的相关教学建议。

**关键词:**数学能力;数学能力成分;数学能力结构;最优尺度回归分析

**中图分类号:**G632.0

**文献标志码:**A

**文章编号:**1674-5884(2020)02-0029-07

马克思曾说:“一门科学,如果成功地运用了数学,它就能真正达到完善的地步。”<sup>[1]</sup>随着大数据科学和信息技术的发展,数学作为这些科学与技术的基础,也备受重视。近日,为切实加强我国数学科学研究,科技部、教育部、中科院、自然科学基金委共同制定了《关于加强数学科学研究工作方案》。随着现代数学在理论与方法上变得更抽象、综合,数学的应用范围也在逐渐扩大,它的许多重要理论和方法在自然科学和社会各方面的应用无处不在。数学的重要性引发了数学教育的研究需求,在数学教育研究方面,关于培养数学能力的研究已然成为数学教育研究中的一个重大研究课题,同时学生的数学能力水平也是高中生数学综合素质水平高低的一大评判标准。因此,培养和发展学生的数学能力进而提升学生的数学综合素质,应被贯穿学生整个中学教育阶段。

数学能力指个人有序且高效地完成数学活动

时所表现出来的稳定的人格心理特征<sup>[2]</sup>。能力结构指能力内各因素和各组成部分之间组织形式的规律性,是由各要素和各组成部分共同决定并根据自身发展规律逐步形成的一种内在关系<sup>[3]</sup>。

目前,关于中学生数学能力的研究,国内学者们研究的方向各不相同,大部分对数学能力的培养方面进行了思考,却忽略了在实践的基础上对数学能力的界定,而数学能力的培养并不仅仅专注于提高数学解题的能力。本文主要从两个方面研究了数学能力的概念和内涵,并由此界定了数学能力的成分和结构,在这一基础上,设计了调查问卷;以湖南省宜章一中为调查对象,利用统计分析方法对问卷结果进行分析,得到高中生数学能力现状,针对这些现状提出了提高学生数学能力水平的几点教学建议。

收稿日期:20190723

基金项目:湖南省普通高等教育教学改革研究项目(湘教通[2018]436号;序号368)

作者简介:肖洵(1996-),女,湖南郴州人,中学二级,硕士生,主要从事中学数学、统计思维的研究。

## 1 中学生数学能力的成分分析

建构主义认为,教师不应只是知识的呈现者,学习是学生自我建构知识和认知的过程<sup>[4]</sup>。在教育实践中,教学要体现学生的主体性,而培养学生的数学能力远比培养解题能力关键。数学教育是中学教育的一个重要组成部分,对数学能力的研究应该更全面、更深入,要想发展中学生的数学能力,必须立足实际,了解高中生数学能力的现状和发展情况,这对数学课程改革和教育教学都具有指导性意义。

数学能力的研究最终是讨论数学能力成分的定义和数学能力结构的构建。只有明确划分数学能力的结构要素,才能继续对学生数学能力的培养和发展进行研究。显然,这是对数学能力问题研究的关键点<sup>[5]</sup>。古往今来,许多教育工作者和心理学家对数学能力的结构进行了深入和富有成效的研究,如苏联心理学家克鲁切茨基系统地研究了数学能力的性质和结构,得出了数学能力的9个组成部分:(1)数学材料的概括能力;(2)数学材料的规范化能力和利用关系、连接的结构进行计算的能力;(3)用数字等符号进行计算的能力;(4)具有连续性和节奏性的逻辑推理;(5)思维结构缩短的思维能力;(6)心理过程由正思维序列能力逆转为逆思维序列能力;(7)思维灵活性;(8)数学记忆能力;(9)形成空间概念的能力<sup>[6]</sup>。克鲁切茨基围绕思维能力展开分析,借助思考路径方法说明了数学能力结构的九个主要组成部分,具有很强的数学特性。

我国的中学教材、考纲和课程标准对中学生数学能力也提出了要求。在教材方面,因为教材反映课程和教学的目标,并为教育的实践和学生的学习提供方式方法,因此它的编排贯穿了数学能力培养的主线。2013年教育部开展了对普通高中课程内容的进一步明确和修改工作,把数学课程分为必修课程、选择性课程和选修课程;在新的教材课程内容编排中,各个板块所体现的数学能力之间是相互交叉,但又不是简单的并列关系。

在考纲和课程标准方面,依据教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017版)》(以下简称《课标》),高考的考纲对数学能力做出了新的要求:对所学知识点能进行良好的表述与语言说明,会用所学知识讨论、判断并解决基本问题;能运用

学习到的内容对相关的具有不确定性的结果进行研究、探讨和引申;能够用合适的数学语言准确表达所学知识,能够运用学习到的内容去对比、判断、研讨,有着运用基础知识处理相关问题的能力;考查学生的运算求解能力、空间想象能力、推理能力、数据处理分析能力以及应用意识和创新意识<sup>[7]</sup>。《课标》中指出,高中数学课程的目的是为了让学掌握数学基础知识、技能、思想和活动经验(简称“四基”),为后续学习和研究奠定基础;掌握识别和提出问题、思考和处理问题的能力(简称“四能”)<sup>[8]</sup>。可以看出,在总体目标中,《课标》对学生识别和提问、思考和处理问题的能力提出了要求,还要求学生掌握判断、分析、概括、交流、空间想象、逻辑推理、运算、应用、创新、批判性思维和数学审美等能力。因此,探究教材、考纲和课程标准中所需要的数学能力可以大大促进教师和学生数学能力的认知,从而使得教学内容更具目的性和效率性。

通过对文献资料的收集整理,本文将数学能力的成分结构总结如图1所示:

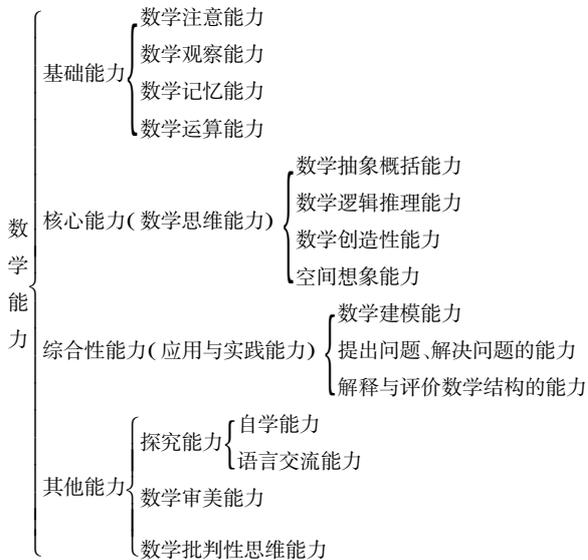


图1 数学能力成分结构

结合文献中的对数学能力的界定以及教材、考纲和课程标准中所要求的数学能力,同时考虑到有的数学能力的外在表现特征不明显,还有的不太方便将其量化通过测试题来体现。如数学语言交流能力,更多地体现在老师学生之间的交流上,不易用测试题来体现;数学注意力更多地平时的课堂上表现;数学自学能力、审美能力也不能简单地用测试题来体现。故本文主要针对课程标

准较重视且易量化的9种数学能力(观察、理解、判断、运算、空间想象、逻辑推理、应用、创造性思维、批判性思维能力),基于以上能力分别设计了高中生数学能力调查问卷和数学能力测试卷各一份,旨在让老师对于高中生数学能力发展的真实情况有一个理论上的认知,对于不同学生所表现的不同能力欠缺,能及时找出问题根源,并结合相关习题训练,提升学生学习成绩。

## 2 调查结果与分析

本次能力测试卷的内容以初中和高一知识为主,题型较灵活。以中学数学教材为基础,参考《普通高中课程标准(实验版)》和《高中数学教材课程教师用书》,同时参照了东北师范大学冯国东的《中学生的数学能力测查与分析》的数学能力测试题,根据数学测试的目的,联系中学生的思考习惯,设计了测试题。

本文采用随机抽样的方法,共发出《高中生数学能力调查问卷》与《能力测试题》160份,最终收回160份(问卷回收率为100%),其中有效问卷149份,无效问卷11份。无效问卷指只参与了《高中生数学能力调查问卷》的调查,但《能力测试题》部分为空白的问卷。

图2是针对能力测试卷中各题测试结果的信度分析:

可靠性统计	
克隆巴赫 Alpha	项数
.754	16

图2 信度分析

由图2可知,能力测试卷的信度约为0.754,数据的可靠性较好。

### 2.1 能力测试卷的结果分析

由总样本的测试结果和标准化后的得分率可看出,学生的判断能力较强,其次是理解能力、逻辑推理能力、空间想象能力次之,创造性思维能力较差,最差的是运算能力、应用能力和批判性思维能力。

由总分中各分数段的分析可知,学生得分大多集中在31~80分之间,占总数的66.44%,说明学生的数学能力大多处于中等或中等偏下水平,能力强的人不多,整体水平不高。

针对测试卷中出现的部分典型问题,做出如下分析,如:对于新定义题,应先观察并理解新定义再进行计算,而调查表明有些学生没有理解题目的本质,解题时不愿意摆脱陈旧观念,也说明他们的思维不够灵活;解题时容易忽略空间的情况,说明空间想象能力较弱;有些学生没有认真审题,忽略题中“请同学们把题目编完”信息,也说明中学生遇到问题时更习惯解决它,他们的解题意识较强;对于不符合实际的问题,如关于利用韦达定理求解方程实数根的题目,答案本是无解,但大部分学生却“算出了”答案,这反映了他们对定理内容掌握得较好,却忽略了定理的使用条件,就盲目解题,同时也说明多数学生在做题时,急于解题,而失去了判断和思考能力,从侧面也说明中学生存在思维被限制、不愿意打破条例、批判性思维能力欠缺等情况。

### 2.2 调查问卷的结果分析

#### 2.2.1 数学能力的基本情况分析

对数学兴趣和能力的调查结果进行分析:在被试学生中,所有学生都对数学不讨厌,却有13.43%的学生对做数学题表示不喜欢甚至讨厌。大部分学生认为自己的数学能力一般,实际上大部分学生的数学成绩处于中等水平,说明中学生数学能力和成绩有待提高;学生认为他们最擅长的题型是运算类和空间想象类,最不擅长的题型也是运算类和空间想象类,这似乎与调查结果相矛盾,但实际上可能是因为学生自我认识不全面,也可能是因为这两类题在平时学习和考试中虽然看似简单但失分较严重。

对学生心理素质情况的调查结果进行分析:在做题时发现运算较繁琐时,约一半的学生会坚持算下去,但其中只有一半的学生能算对。部分学生愿意尝试,走一步看一步,12.08%的学生选择直接放弃。这说明学生在运算时心理素质不太好,自信不够。在遇到难题时,约一半的学生会反复思考直到把题目解答出来为止,还有18.79%的学生直接放弃,认为自己不可能解答出来,可能是知识掌握不牢靠,也可能是不自信造成的。

对失分原因和题型的调查结果进行分析:被试学生在上一次考试中失分最多的题型是运算类,其次是应用类,这说明学生认识到运算能力和应用能力较弱。有30.87%的学生表示考试中因

为粗心、看错题或运算出错而失分,大约 1/4 的学生考试丢分是由于知识掌握不好或题目理解错误,有 16.68 % 的学生在做题时思路不清晰导致失分,还有超过 1/4 的学生至今没找到自己的失分原因,这不排除学生因自我认识或者不善于总结错因导致数学成绩不理想的可能性,这说明要提升学生数学成绩,应在训练学生的运算能力方面下功夫,稳抓学生的基础知识,训练学生的做题习惯。

### 2.2.2 数学学习情况分析

对数学学习习惯的调查结果进行分析:在思考和解决数学问题时,将近 40 % 的学生会先分析考点并能找准知识点,再继续思考简单方法解答;大约 2/3 的学生在拿到题目之后,不做过多思考,直接答题,边思考边写,这说明学生做题的盲目性太大,学生往往会由于知识点理解不透或对题目意思产生误解,导致解答不出或解答错误。在解题时,很少有学生思考不同解法的习惯,这就限制了他们创造性思维的发展,造成这种现象的原因可能是现在学生课程作业繁重,学生完成作业的时间紧,没有精力对解答过的题目再回过头来做过多的思考。超过 2/3 的学生有数学错题本,但其中只有相当少的学生会使用错题本,会对平时作业和考试中出现的错题进行整理归纳并对知识点回顾思考,大多数学生只是心血来潮或者是由于外界其他因素而准备了错题本,还有 28.19 % 的学生没有错题本。上述情况说明:大多数学生没有对知识点或错题进行整理归纳及反思原因的习惯。

对数学基础知识学习情况的调查结果进行分析:有超过一半的学生表示对数学定义、公式或定理等基础知识的理解不够深入,只有 6.04 % 的学生认为自己数学定义、公式或定理的理解已经很到位;在学习新的数学概念、公式或定理时,大多数学生会在理解的基础上对其进行记忆,有大约 15 % 的学生会结合实例,理解它们的特性,以此来加深理解和记忆,还有一小部分学生采用对比方法进行记忆。只有对这些基础知识掌握好了,学生才能顺利解题。

对教学情况的调查结果进行分析:67.11 % 的学生认为学校有必要对数学各项能力进行系统专门的训练,少部分学生对此持中立态度,还有一部

分学生认为数学能力靠天赋或只能自身培养,学校没必要进行训练,对于某些数学能力,如运算能力或应用能力,学校可根据自身实际情况考虑是否对学生进行系统训练。

## 2.3 综合分析

本文在对调查问卷、能力测试卷的调查结果及典型错题分析的基础上,利用 SPSS 软件对数据进行分析,如图 3~图 7 所示。

### 2.3.1 多维尺度分析

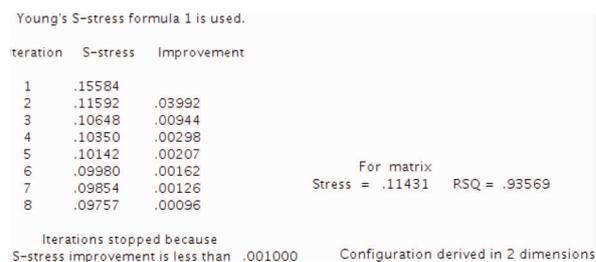


图3 多维尺度分析结果(一)

由图 3 可知,上述 9 个变量在经过 8 次迭代后收敛了,Stress 值(信度的估计值)约为 0.11,RSQ 值(效度的估计值)约为 0.94,值较大,说明结果可接受程度较高。

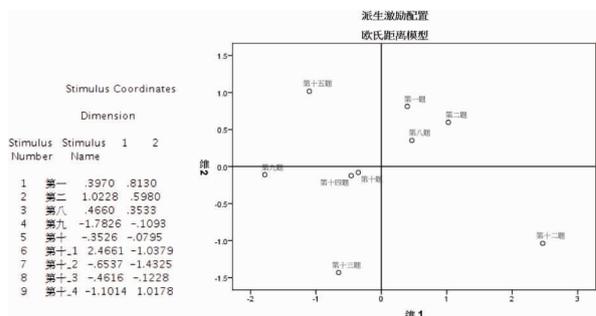


图4 多维尺度分析结果(二)

由图 4 给出的每个变量的坐标值和对应的坐标图可知,调查问卷中第一、二、八题,第十、十四题之间具有较高的相似性。

### 2.3.2 最优尺度回归分析

考虑到量纲的影响,本文采用最优尺度回归分析法将分类变量的不同取值进行量化处理,这就大大提高了数据的处理能力,扩大了回归分析的应用能力。

由图 5 给出的“模型摘要”结果可知,该模型的  $R^2$  为 0.314,调整后的  $R^2$  为 0.219,解释程度值较低,符合实际调查情况,但不适合作推广模型。

模型摘要				
	复 R	R 方	调整后 R 方	表观预测误差
标准化数据	.560	.314	.219	.686
因变量: 总分				
预测变量: 第一题 第二题 第八题 第九题 第十题 第十二题 第十三题 第十四题 第十五题 性别				

图5 最优尺度回归分析结果(一)

ANOVA					
	平方和	自由度	均方	F	显著性
回归	46.784	18	2.599	3.306	.000
残差	102.216	130	.786		
总计	149.000	148			
因变量: 总分					
预测变量: 第一题 第二题 第八题 第九题 第十题 第十二题 第十三题 第十四题 第十五题 性别					

图6 最优尺度回归分析结果(二)

由图6给出的“ANOVA”结果可知,概率P-值小于显著性水平0.05,说明该模型通过方差检验,且至少存在一个自变量对因变量“总分”有显著性影响。

系数					
	标准化系数		自由度	F	显著性
	Beta	标准误差的自助抽样(1000)估算			
第一题	.253	.224	2	1.279	.282
第二题	-.097	.189	2	.264	.769
第八题	-.162	.151	2	1.145	.321
第九题	.115	.149	1	.598	.441
第十题	-.229	.108	2	4.531	.013
第十二题	-.253	.131	3	3.699	.014
第十三题	.132	.114	2	1.331	.268
第十四题	-.151	.141	2	1.148	.320
第十五题	-.102	.158	1	.422	.517
性别	.002	.053	1	.001	.976
因变量: 总分					

图7 最优尺度回归分析结果(三)

由图7给出的“系数”结果可知,第十题(是否会思考不同解题方法)、第十二题(对数学定义、公式或定理的理解程度如何)的概率P-值分别为0.013、0.014,均小于显著性水平0.05,说明第十题和第十二题对因变量“总分”存在显著性影响。

由此可见,第一题(你对数学感兴趣吗)、第二题(你喜欢做数学题吗)、第八题(当发现运算较繁琐的时候,你会怎么办)、第十题(你是否会思考不同的解题方法)、第十二题(你对数学定义、公式、或定理的理解程度如何)、第十四题(你是否有专用的数学错题本,汇总考试和作业中的

错题)是“总分”的影响因素,它们分别对应着兴趣因素(第一、二题)、心理素质因素(第八题)、学习习惯因素(第十、十四题)和对基础知识的学习情况因素(第十二题)。综上所述,影响学生数学能力的主要因素有兴趣、心理素质、学习习惯和对基础知识的掌握情况因素,因而教师应针对性地主要训练和培养学生上述四个方面的能力,其他的也可视实际情况而定。

### 3 结论与建议

根据以上对宜章一中高一、高二学生测试成绩的数据分析、测试卷中的典型错误分析、调查问卷结果分析,可得到如下结论:(1)学生的数学能力大多处于中等或中等偏下水平,数学能力强的不多,整体水平不高。影响中学生数学能力的因素有学生对数学是否感兴趣、对新知识或概念的接受程度和理解程度、学生的心理素质、学习习惯与做题习惯。(2)中学生的各项数学能力中,判断能力较强,理解能力、空间想象能力和逻辑推理能力次之,创造性思维能力较差,最差的是运算能力、应用能力和批判性思维能力。(3)中学生认为自身最擅长的是运算类的题目,认为只要牢记概念、公式、定理,就能进行正确运算,但实际上中学生的运算能力差,且在平时作业与考试中运算题是主要失分题型。其主要原因可能是对基本概念、公式定理掌握不到位,不了解基本算理,运算时心理素质不好,不够自信,运算习惯较差等。(4)中学生的应用能力有较大欠缺,但解决问题的意识强于提出问题的意识,即他们更习惯解决问题。在解决应用题时,存在的问题有不认真审题、不能较好地理解题目本质、解题时不愿意摆脱陈旧观念、考虑问题脱离实际不全面。其主要原因可能是学生的建模能力差,生活实践不够、义务教育阶段对应用题的训练不够,教材中训练应用能力的题型单一、陈旧,教学中教师不够重视等。(5)中学生的批判性思维能力和创新性思维能力欠缺,其主要原因可能是在长期的教育体制下,中学生的独立思考和评价能力差,不愿意打破条例,思维定式没有形成独特的思维体系;对知识的掌握还不够全面、透彻,如容易忽略定理的使用条件,盲目解题。(6)各项数学能力之间是相互交叉渗透的关系,而不是简单的并列关系,即只一种

或几种能力强,总体数学能力不一定强,它是多种能力共同作用和影响的结果。

广大数学教育者早已达成一个共识:教师在数学教学过程中,除了要传授学生以数学基础知识之外,更要关注学生数学能力的培养及其发展情况<sup>[9]</sup>。教师要有效地利用课堂,关注学生状态,充分利用好教学资源,力争营造一个良好的教学环境。要想提高数学能力,需从以下几个方面入手:摆正心态,优化学习方法,注意良好的数学思维习惯的形成,重视对基础知识的教育和积累等<sup>[10-12]</sup>。

根据调查结果与分析,本文就如何提高中学生数学能力给出几点建议:(1)加强对数学基础知识的教学。数学概念、公式和定理等基础知识是学生解题的基本依据,学生对其掌握的程度与解题的速度和准确性直接挂钩。所以,教师可以加大对知识生成的过程的强调力度,有助于学生在理解的基础上更深层次地运用相关知识。(2)重视对数学基本技能的教学。教师在教授完新知识后应帮助学生选择适合、快速的方式记忆知识,可培养他们思维的条理性。随后教师可设置对所学知识针对性强的相关练习进行训练,帮助学生理解和记忆知识。在练习中,教师可根据实际情况,准备一些概念辨析题和辨识题,有助于学生在练习中积累数学活动经验。(3)加强数学思想方法的教学。数学思想方法对解题有指导性作用,掌握和积累它对学生的数学能力发展有至关重要的作用,所以在平时的数学教学与学习中,教师和学生不应忽略数学思想与方法的作用。(4)普及和增强学生对算理的认识和加强运算训练。在教学中,教师应注意让学生体会和理解运算法则的意义与作用,这有助于提高学生的运算效率。学校或教师也可根据自身实际情况,让学生进行一些系统性的数学能力训练。(5)重视学生应用实践能力的培养,加强学生审题和理解能力的训练,对于教材和平时练习中的应用题,教师要善于引导学生开拓思维,对问题进行思考分析,并结合生活实际建模。(6)关注学生良好的数学学习习惯的养成,有助于降低学生盲目做题的可能性,增强自我评价和监控意识。如认真审题、不领悟错题目意思,养成“先思考再下笔”的习惯,免得做无用功;学会对自身阶段性的学习中的知识点或错

题进行整理归纳和反思,学会举一反三,而不是一味简单模仿,这有助于加深学生对知识点和错题的印象和理解,同时也有利于学生系统性学习。(7)增强学生的心理素质。心理学研究表明:非智力因素如兴趣、心理素质等在一定程度上会影响学生的智力和能力发展。教师应注意培养学生的解题耐心和毅力,这些品质在平常生活中也可加强,并适当给予鼓励,有助于增强学生的自我肯定意识,磨炼学生的意志品质。

由于时间和条件限制,再加上自身理论水平不高、实践经验欠缺,本研究还存在很多不足之处:(1)样本选择不够全面且样本量较小,调查对象仅为宜章一中高一、高二学生。今后会在此研究的基础上,进一步扩大研究范围,对高一至高三年级展开调查;(2)对于本文提出的关于提高中学生数学能力的几点建议,并未进行实践检验,可在今后的实践中弥补其不足,进一步完善关于提高中学生数学能力的建议。

#### 参考文献:

- [1] 保尔·法拉.回忆马克思[M].北京:人民出版社,1954.
- [2] 林崇德.心理学大辞典[M].上海:上海教育出版社,2003.
- [3] 胡中锋.中小学生学习数学能力结构研究述评[J].课程·教材·教法,2001(6):45-48.
- [4] 高文,徐斌艳,吴刚,等.建构主义教育研究[M].北京:教育科学出版社,2008.
- [5] 喻平.数学能力的成分与结构[J].课程·教材·教法,1997(11):26-28.
- [6] 季素月.中学数学能力培养研究[M].长春:东北师范大学出版社,1999.
- [7] 教育部考试中心.2019年普通高等学校招生全国统一考试大纲[M].教育部考试中心,2019.
- [8] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.
- [9] 张玉生,康淑瑰,张会贞.浅谈数学能力与数学学习[J].雁北师范学院学报,2006(6):70-71.
- [10] 孙以泽.数学能力的成分及其结构[J].南京晓庄学院学报,2003(19):97-99.
- [11] 陈铎毓.高一学生数学运算能力现状调查研究[D].南京:南京师范大学,2017.
- [12] 杜先存.云南民族中学高一学生数学能力水平调查及思考[D].昆明:云南师范大学,2006.

# Investigation and Analysis for Mathematical Ability of Middle School Students with Optimal Scale Regression Analysis Method: Taking Yizhang No.1 Middle School as an Example

XIAO Xun<sup>a, b</sup>, YIN Xiaofeng<sup>b</sup>, XIAO Xin<sup>a</sup>

(a. Yizhang No. 1 Middle School, Chenzhou 424200, China;

b. School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** The three parts of education are knowledge, skills and literacy, and mathematics education, as a major module of secondary education, should be more comprehensive and in-depth to the studies of mathematical ability. In educational practice, it is important to base on reality and understand the current situation and development of high school students' mathematical ability in order to develop the mathematical ability of students, which has guiding significance for the reform of mathematics curriculum and education and teaching. Firstly, this paper defines the composition and structure of mathematical ability by using the literature method. Secondly a questionnaire is designed by nine kinds of mathematical abilities being selected according to the definition. Thirdly, combining statistical method, this paper, on the basis of questionnaire data, discusses the development of middle school students' mathematical ability and its influencing factors by using the optimal scale regression analysis method. Finally, according to the analysis results, it puts forward some teaching suggestions on improving middle school students' mathematical ability.

**Key words:** mathematical competence; mathematical competence components; mathematical competence structure; optimal scale regression analysis method

(责任校对 朱正余)