doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2017.07.015

反例对数学分析教学的促进作用

欧伯群,刘小松
(岭南师范学院 数学与统计学院,广东 湛江 524048)

摘　要:在数学分析的教学中,举出相应反例,可以加深对数学概念、定理、法则、公式的理解以及纠正学习中的错误,有利于激发学生的学习兴趣,培养创新意识和创新能力。恰当运用反例,充分体现了对数学分析学习的重要性。

关键词:反例;数学分析;教学;作用

中图分类号:G642.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-5884(2017)07-0068-04

1　引言

著名科学家、哲学家波普说:"知识成长的逻辑是在猜想和反驳中成长的。"数学中提出问题的主要类型与陈述命题是否正确,如果正确则证明之,如果不正确则举出一个相反的例子驳倒它,这种用来说明某命题不真的例子在数学上称为反例。它是相对于数学命题而言的具体实例,是反驳与纠正错误的一种方法。

例如:"若函数$f(x)$的原函数$F(x)$存在,则$f(x)$连续。"这个命题是不正确的。

反例　$f(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\0, x=0,1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x, x\in(0,1)\\0, x=0,1\end{cases}$,

说明$F(x)$是$f(x)$的原函数,但在$f(x)$在0,1间断。

数学分析是近代数学与现代科学的基础。作为师范院校数学专业最重要的专业基础课,它对于许多后续课程的学习,如常微分方程、复变函数、概率统计、实变函数等课程,乃至对思维问题和解决问题能力的培养都起着十分重要的作用。该课程的内容包含一套抽象而且形式化的严谨的理论体系,这使刚跨入高等学校数学专业的学生一开始就遇到了学习上的困难,具体表现在不能准确理解概念的本质、无法正确运用数学分析中的有关定理解决问题等等。因此,在数学分析的学习中,要正确理解概念,分清定理中条件的必要性和充分性,纠正错误与克服思维定势,明确定理、法则、公式中条件的严密性及推翻假设命题等。恰当地使用反例来帮助学生修正理解时的错误,走出误区,不仅是一种有效的方法,也是一种必要的手段。下面就简单地谈谈数学分析的学习中所得出的反例在学习数学分析中的若干作用。

2　反例在数学分析教学中的作用

2.1　反例能正确理解概念

数学的知识体系是由概念和命题组成的,要掌握好数学分析,首先要正确理解概念。从一定意义上来说,数学分析学习成绩的高低取决于对数学分析概念的掌握程度。如果不重视概念的学习,对概念的特征本质抓得不准、分得不清、记得不牢,就会在很大程度上影响数学分析学习。反例是强化概念的有

收稿日期:20170221
基金项目:广东省自然科学基金(2014A030307016);岭南师范学院2014年精品课程建设项目(LSKC1403)
作者简介:欧伯群(1964-),男,广西钦州人,副教授,主要从事微分方程研究。

力工具,往往起到正例所起不到的作用。

例 1[1]数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义:“ $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时,有 $|a_n - a| < \varepsilon$.”

如果我们对这一概念分得不清,就会容易理解为“无限个 $\varepsilon > 0$, 对每个 ε 都存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,有 $|a_n - a| < \varepsilon$”。事实上,这是不正确的[2]。

反例 1　数列 $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{4}$, 它有无限多个 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n}$ 对每个 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^n}$ 都存在正整数 N (可取 N = 1) 对任给的 $n > N$ 有

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{4} - 0\right| = \begin{cases} 0 < \varepsilon_n \text{ 当 } n \text{ 为奇数时} \\ \dfrac{1}{2} < \varepsilon_n \text{ 当 } n \text{ 为偶数时} \end{cases}, \quad \text{但数列} \left\{\frac{1+(-1)^n}{4}\right\} \text{是发散的。}$$

2.2　反例能分清定理中条件的必要性和充分性

分清数学分析问题中的充分条件和必要条件,有助于对分析问题的研究,也有利于对定理的理解。反例能帮助我们分清定理中条件的必要性和充分性,从而起到深刻理解,牢固掌握的作用。

例 2[1]　如果二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 上可微,则全微分 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ 存在,显然两个偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在。但函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数存在,函数不一定在这点可微。说明对二元函数来说,函数在某点可微是函数在该点存在两个偏导数的充分而不必要条件。

反例 2[3]　$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 存在两个偏导数

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0; f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0。$$

假定 (x,y) 在点 $(0,0)$ 可微,则必有 $df = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y = 0$,

$\Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$。

当取 $\Delta y = \Delta x$ 时, $\Delta f = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|} = \sqrt{|\Delta x|^2} = |\Delta x|$,

$\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 \cdot |\Delta y|^2} = \sqrt{2 \cdot |\Delta x|^2} = \sqrt{2}|\Delta x|$,

于是 $\lim\limits_{\rho \to 0} = \dfrac{\Delta f - df}{\rho} = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{|\Delta x| - 0}{\sqrt{2}\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$。

即 $\Delta f - df$ 不是关于 ρ 的高阶无穷小量,因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微。

所以函数 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在原点 $(0,0)$ 存在两个偏导数,但在点 $(0,0)$ 不可微。

2.3　反例能纠正错误,克服思维定势

我们在研究数学问题时,容易形成固定的思维模式,即定势。它是发散的基础,没有一定的定势储备,便没有灵活的发散。但是囿于定势和习惯便会产生“墨守成规”“机械记忆”“被动模仿”等负面效应,容易形成思维障碍。悖习求异的反例恰恰是解决这一弊端的有力方法。

例 3[1]　在学习洛必塔法则利用导数计算极限时,都认为只要符合条件都能求解的思维定势。事实上,对于洛必塔法则,并不是只要符合条件都能求解。

反例 3　求极限: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, 其中 $f(x) = e^x - e^{-x}, g(x) = e^x + e^{-x}$。

显然 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$,

但是 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 无论应用多少次洛必塔法则所求极限都是不定式,无法得到最终结果。

正确的解法: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$。

2.4 反例能明确定理、法则、公式中条件的严密性

人们的认识总是由浅入深、逐步发展的,尽管老师在教学中把定理、法则、公式的意义和条件讲得十分深刻、十分彻底,但学生在运用时,仍然会忽视定理、法则、公式的条件而造成错误。许多数学命题,其条件有多个,当条件变化(增加、减少、更换)时,导致命题为假的反例就是条件变化的反例。

例 4[4] 在数学分析中,罗尔定理的条件有三个:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上可导;(3) $f(a)=f(b)$。

结论是:至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$。

为深刻理解此定理,可通过反例来说明罗尔定理中的三个条件与结论之间的关系。

反例 4 ($f(x)$ 不满足条件(1)的情形的反例取 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x\in R-\{0\}\\1,x=0\end{cases}$,

$f(x)$ 在(0,1)内可导,且 $f(0)=f(1)=1$,

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续,即 $f(x)$ 在[0,1]上不连续。

显然在(0,1)内不存在 ξ 使得 $f'(\xi)=0$。

类似地,讨论 $f(x)$ 不满足条件(2)的情形,举反例:$f(x)=|x|,x\in[-1,1]$;

$f(x)$ 不满足条件(3)的情形,举反例:$f(x)=\ln x,x\in[1,2]$。

另一方面,罗尔定理没有说,要使 $f'(\xi)=0$ 成立的 ξ 存在,上述三个条件非满足不可. 事实上的确存在这样的函数 $f(x)$,它不全满足上述三个条件,但 $f'(\xi)=0$. 成立的 ξ 在 (a,b) 内确实存在。

取反例:$f(x)=\begin{cases}1-x^2,-1\leqslant x<1\\1,x=1\end{cases}$ 在$[-1,1]$上不满足罗尔定理的条件(1)和条件(3),但定理的结论对该函数却成立,即存在 $\xi=0\in(-1,1)$,使 $f'(\xi)=0$。

2.5 反例是推翻假命题的重要手段

我们在学习未经证实的命题时,通常要做好肯定与否定的两手准备,要使命题得到肯定必须经过演绎证明。而要否定一个命题,就要举一反例加以反驳即可。

例 5 我们知道:可导函数在一点(该点可以不可导,但连续)的两侧导数异号,则该点取得极值。现有命题:可导函数在极值点的左右两侧导数异号。(正确吗?)

这个命题理论上不好解释,更别说演绎证明了。但举一反例就可说明它是错误的。

取反例:$f(x)=\begin{cases}x^4\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right),x\neq0\\0,x=0\end{cases}$,

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 取极小值,并且它的导数是:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left[4x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)-\cos\dfrac{1}{x}\right],x\neq0\\0,x=0\end{cases}。$$

在原点的每一侧的任意邻域内,导数兼取正值和负值,$f'(x)$ 无法形成如 $(a,0)$ 或 $(0,b)$ 的区间内保号。

2.6 构造反例可以培养创新意识和创新能力

构造反例不是一项简单的工作,它是一个积极思考、探索发现的过程。我们通过构造反例,不仅开拓了创新思维能力,还大大提高了解决数学分析难题的能力。

例 6 试写出一正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,使得它:1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;2) $a_n\neq o\left(\dfrac{1}{n}\right)$。

分析:我们非常熟悉的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 满足条件 1)不满足条件 2),而另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 满足条件 2)不满

足条件1)。考虑将二者结合起来,我们发现,如果把 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 中一部分项 $\frac{1}{n^2}$ 换成 $\frac{1}{n}$,那么所得的级数满足条件2)。为使新级数仍然收敛,我们只对 $n=1,4,9,16,25,36,\cdots$ 这些项进行上述改换,即新级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots \quad (1)$$

级数(1)掺杂了一部分 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的项,这些项的和为 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$,

由此可以想见级数(1)是收敛的。

解:设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 如式(1):当 $n=$ 整数平方数时 $a_n=\frac{1}{n}$,否则 $a_n=\frac{1}{n^2}$。显然 $a_n\neq o(\frac{1}{n})$。

又因为部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^i}\left(i=\begin{cases}1,\text{当 } k=\text{整数的平方时}\\2,\text{当 } k\neq\text{整数的平方时}\end{cases}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k^2\leqslant n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty,$$

根据正项级数收敛的充分必要条件,此级数收敛。

3 结语

综上所述,我们可以看到,科学地运用反例来解决数学分析中的问题给我们带来了很大的方便。反例的构造使我们加深了对知识的理解,拓宽了应用方向,从另一个角度维护了正例的思维,并在不断反驳与肯定中达到了自我思维的肯定和知识体系的完善。在数学分析的学习中恰当地运用反例,可以强化推理的严谨性,培养思维的批判性,对全面提高数学分析的学习、解题能力起到重要作用。

参考文献:

[1] 华东师大数学系. 数学分析(第四版)(上、下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2010.
[2] 邓乐斌. 数学分析的理论、方法与技巧[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2005.
[3] 刘玉琏,傅沛仁. 数学分析讲义(第四版)(上、下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2007.
[4] 吴志华. 浅谈反例在高等数学教学中的作用及构造[J]. 牡丹江教育学院学报,2008(3):87-89.

(责任校对 莫秀珍)