doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2015.12.025

关于高等数学教学中部分知识点的探讨

陈茜
(中南林业科技大学 理学院,湖南 长沙 410004)

摘　要:讨论了函数极限教学的调整,等级无穷小替换在幂指函数极限中的应用,有理函数积分的常见类型,微分方程题目和重积分的对称性。说明了理论的原因,给出了证明并用具体的例子演算了解题过程。

关键词:极限;等价无穷小;积分;对称性

中图分类号:O13　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1674-5884(2015)12-0072-03

教学授课是一个非常灵活的过程。教师在讲授课本知识的基础上,能够根据教学目标、教学对象、课堂气氛等的需求,及时引入、总结一些教学知识点,会使得教学课堂更丰富,教学对象更受益。为此,我们讨论了高等数学教学中的几个知识点。

1　函数极限教学的调整

极限概念的教学是从数列极限开始的[1]。数列是特殊的函数,在于它的变量只能取正整数,所以数列的极限只讨论 n 趋于正无穷时数列收敛的情况。但对于广义上的函数来说,除了 $x\to+\infty$,还有 $x\to-\infty$,$x\to\infty$,$x\to a$,$x\to a^-$,$x\to a^+$ 这5种方式。那么在学习数列极限的基础上,再引入函数极限时,可首先引入 $x\to+\infty$ 时函数的极限。原因在于:两者的自变量都在趋于正无穷,只要将数列自变量取离散正整数的状态推广为连续状态下的正实数,就过渡到了函数的极限。

但在同济版高等数学教材[2]中引入函数极限是从 $x\to a$ 开始的,随后才是 $x\to\infty$。这样就将数列和函数在无穷下的极限联系断开,不利于极限概念的深入理解和巩固。

2　等价无穷小替换在幂指函数极限中的应用

对幂指函数求极限,除了教材中涉及到的对数法、恒等变形法来求解外,有很多同学还会有这样的疑问:能否运用等价无穷小替换原理求解,尤其是针对 0^0 的未定式。

实际上,如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内为连续函数,当 $x\to x_0$ 时,若 $f(x)\to0$,$g(x)\to0$ 且 $f(x)\sim\alpha(x)$,$g(x)\sim\beta(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}$[3]。

由于:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}$,而 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\beta(x)}\beta(x)\ln\left[\alpha(x)\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{g(x)}{\beta(x)}\beta(x)\ln\alpha(x)+\dfrac{g(x)}{\beta(x)}\beta(x)\ln\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)\ln\alpha(x)$,代入原式就得到结论了。

其实对于 1^∞ 和 ∞^0 这2种未定式,间接利用上面的结论同样可以得到有效的结论。如:$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=$

收稿日期:20150521
基金项目:国家自然科学基金(11426222)
作者简介:陈茜(1978-),女,河北邢台人,讲师,硕士,主要从事概率论与数理统计研究。

$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$;$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$

3　有理函数积分的常见类型

有理函数分为假分式和真分式 2 种情况。假分式一般通过多项式的除法可化为整式和真分式。所以有理函数的积分最实质的就是真分式的积分。如果真分式中的分母可以分解因式,真分式必可裂为部分分式之和。最后,真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式中只出现 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}$ 和 $\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$ (x^2+px+q 为二次质因式)等两类函数。

在同济第 6 版高等数学有理函数的积分教学中[2],认为 $P_1(x)$ 为小于 k 次的多项式, $P_2(x)$ 为小于 $2l$ 次的多项式。我们认为这样的叙述有失严谨性,因为 $P_1(x)$ 到底应是 $k-1$ 次的,还是 $k-2$ 次的,还是……,在解题中学生无法清晰把握;对于 $P_2(x)$ 也是同样的情况。实际上将部分分式通分,与原真分式相等下比较分子中 x 的幂会得到: $P_1(x)$ 应是 $(k-1)$ 次的多项式; $P_2(x)$ 应是 $(2l-1)$ 次的多项式。对部分分式中常见的类型:

1)对分式中的 $\frac{c}{(ax+b)^k}$ 项,利用凑微分法。

2)对分式中的 $\frac{c}{x^2+px+q}$ 项($p^2-4q<0$):通常把分母配方为 $(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$,凑微分后间接利用公式表中 $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$,求出原函数。

3)对分式中的 $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ 项($p^2-4q<0$):通常把分子凑成分母导数的形式,再配 x 的系数和加减常数项,于是 $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{a}{2}(2x+p)+(b-\frac{ap}{2})}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\int\frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$。第一项用凑微分的方法即可。

以上为有理函数积分中常见的三类形式。在具体的题解中这几种形式常常交错出现,使得积分看似繁琐,但掌握其规律并多加练习后就会得心应手。

如求解: $\int\frac{x+2}{2x^3+3x^2+3x+1}\mathrm{d}x$[2]

解:原式 $=\int\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=$

$\int\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=$

$\ln|2x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=$

$\ln|2x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

4　微分方程和重积分对称性题目的引入

一次期末考试出现这样一道题: $y=e^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$,求 $y(x)$ 。乍一看这不是一道微分题,因为没有出现因变量 y 的导数,所以很多学生不知如何下手,丢分严重。但如果在式子两边同时对 x 求导,就成

为一阶非齐次线性微分方程题：$y'(x) = e^x + y(x)$。先用分离变量法求其次方程 $y'(x) - y(x) = 0$ 的通解为：$y = ce^x$；再用常数变易法可求得非齐次的通解为 $y = (x + c_1)e^x$。到此这道题还不能给满分。其实题目中还隐藏了初始条件：当 $x = 0$ 时，$y(0) = e^0 + \int_0^0 y(t)\mathrm{d}t = 1$。所以标准答案为 $y = (x + 1)e^x$。

像这样隐藏初始条件于表达式中，同时还先需求导再明了为微分方程的题目，比较少见。如果能在实际的课堂教学中提出这样的题目给学生思考、求解再总结，这对于学生知识的联系性、思维的发散性和基础功的巩固都非常有利。同样，在现有的教材中对于二重积分知识点的教授没有涉及对称性，但在有些题目中如果利用二重积分的对称性，势必会做到事半功倍。

如：计算二重积分 $\iint\limits_D x(x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2, y \geqslant x^2\}$[4] $=$

$$\iint\limits_D (x^2 + xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由二重积分的对称性，第二项积分为零（ D 关于 y 轴对称，$f(x,y) = xy$ 为 x 的奇函数），使得求两个积分减化为求一个积分，简化了计算过程，提高了做题效率。因此，在课堂教学时如果能适当添加这个知识点，并给出几个具体的题目练一练，不但能丰富同学的积分知识，又可为考研这样的大型考试添砖加瓦。

参考文献：

[1] 刘玉琏，付沛仁. 数学分析讲义[M]. 北京：高等教育出版社，1995.
[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2008.
[3] 陈茜，舒慧颖. 浅析幂指函数的极限问题[J]. 衡水学院学报，2011(4)：8－9.
[4] 郝海龙. 考研数学复习大全（历年统考真题分类训练）[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2014.

（责任校对　晏小敏）