

论数学符号美学的非功利性 对数学思维发展的作用

王 允, 汤 强

(西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘 要:数学符号美学的非功利性彰显数学符号美学的精神享受,强调自然而然的状态,凸显数学符号的理解、运用和表达能力。它激发灵感,促进数学形象思维的发展;诱发联想,促进数学逻辑思维的发展;刺激探索,促进数学抽象思维的发展;展开创造,促进数学创新思维的发展。

关键词:数学符号;非功利性;数学思维;发展

中图分类号:G642

文献标志码:A

文章编号:1674-5884(2014)10-0062-02

著名数学家罗素曾说过:“数学,如果能正确地看待它,则具有至高无上的美——正像雕刻的美,是一种冷而严肃的美。”而他同时又提出:“什么是数学?数学就是符号加逻辑。”可见,数学美在很大程度上表现的是数学符号的美,而美学又有功利性和非功利性。审美非功利性,又称“审美无利害”^[1],此概念最早是由英国哲学家夏夫兹博里提出,后由康德在《判断力批判》一书中得到系统、完整的阐述。康德认为,对于美的欣赏的愉悦,是唯一无利害关系和自由的愉快。他在论述鉴赏判断的契机^[2]时,首先规定了“审美判断是完全无利害观念的快与不快。”其实,所谓非功利性审美,简单地说就是一种摆脱了私欲杂念、忘却了功利目的,追求心灵自由和精神愉悦的审美状态。在这种理念中,康德充分认同了审美鉴赏是自然与人、感性与理性在感性个体上的统一,将人的纯粹主观而不涉利害的快感作为审美判断的唯一标准。因此,数学符号美学的非功利性可以从以下三个角度理解:一是哲学角度。不能只注重数学符号美学的物质享受,更要注重精神享受,注重自然而然的状态;二是数学角度。不能只注重数学符号美学形式,更要注重其内涵;三是数学教育角度。不能只注重学生运用数学符号考试的数学成绩,更要注重其数学符号的理解、运用和表达能力。然而,不论是从数学学科的视角,还是从数学教育的视角,数学符号总是和数学思维联系在一起的,数学符号美学的非功利性对数学思维有着什么作用?是值得探讨的有意义的话题,我们对此进行初步的探讨。

1 激发灵感,促进数学形象思维的发展

数学形象思维是指借助数学形象或表象,反映数学对象的本质和规律的一种思维。其目的是为了获得某种抽象的思维,其结果以典型的个别来反映一般。数学灵

感是人脑对数学对象的结构关系的一种突发性领悟,它是数学形象思维的重要组成部分,新形象的形成,必须借助于灵感基础上的形象思维。数学符号的美来源于数学形象思维的激发,数学符号美学的非功利性促进了数学灵感的激发,促使数学形象思维的发展。

数学符号作为一种可感实体,数学符号的美学作为一种可感状态,数学符号美学的非功利性作为一种可感的主观价值,一方面,激发灵感,为数学形象思维的发展提供了很好的精神状态,奠定了形象思维发展的心理基础。很多数学家都是带着数学符号美学的非功利性产生数学灵感、激发形象思维的。如英国数学家哈密顿发现复数 (a,b) 后,试图将其推广,建立三元函数 (a,b,c) ,结果失败了。直到1843年,突然灵感涌现:放弃将 (a,b) 推广到三元数 (a,b,c) 的想法,而推广到四元数 $(a,b,c,d) = a + bi + cj + dk$ 的形式,四元数诞生了。后来哈密顿回忆发现四元数的经过时说:“1843年10月16日,当我和妻子闲着步行到柏林途中,来到勃洛翰桥时,偶然间,思想的电路打通了,而从初落下的火花就是 i,j,k 之间的基本方程。”这样数学灵感就被激发了出来。这里“闲着”、“偶然”就是非功利性的体现,从中发现数学符号美学的非功利性激发思维产生数学灵感。另一方面,数学符号美学的非功利性还促使跟随主观感受,根据直觉从心灵中感受美的存在,激发数学灵感,促进形象思维的发展,后来竟然得到了实现。如物理学家麦克斯韦在建立电磁理论的过程中,依据法拉第的实验研究结果,把电磁理论方程表述成如下方程组:

$$\begin{cases} \text{rot} E = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{rot} H = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{rot} E = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{rot} H = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

这是根据实验结果总结出来的,但从美的规律、美的角度出发,麦克斯韦联想其对称性,在没有任何数据的情况下,将方程组第二个式子进行改动,如图所示。大约 30 年后的 1887 年,德国物理学家赫兹证实了其改动后的正确性。

2 诱发联想,促进数学逻辑思维的发展

数学是一门严谨的学科,它到处弥漫着逻辑思维的因子。逻辑思维有形式逻辑思维与辩证逻辑思维。在数学学习过程中,既有形式逻辑思维,也有辩证逻辑思维。不过通常使用的是形式逻辑思维。形式逻辑思维是借助于概念、判断、推理等思维形式,遵循形式逻辑规律与法则进行学习活动中的思维。数学也存在着辩证逻辑思维,如我们学习的许多互逆的概念和运算,指数函数与对数函数,三角函数与反三角函数,微分与积分等。数字规律,字母符号或表达式的结构、特征等都有自己的思想内容,都能暗示某种信息。根据这些信息,运用过去习得的经验和以前获得的知识,运用横向联想、纵向联想和逆向联想,找到一个好的解题思路。在这过程中,我们的数学逻辑思维也就自然而然的得到了提高和升华。如我们求函数 $f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$ 的值域。如果直接转化为 $y = A\sin(wx + \varphi) + B$ 型或 $y = f(\sin x)$ 型求值域很难转化,我们观察分式中分子和分母的特征,由这个美的分式进行联想,把它看作点 $(2, 2)$, $(-\cos x, \sin x)$ 两点的斜率,试着利用直线的斜率求解。这里,学生的有效数学思想方法得到调用,实现了从数学符号 \rightarrow 美学的非功利性 \rightarrow 抽象思维,从而概括出所有有关此类型 $y = \frac{a\sin x + b}{c\cos x + d}$ 的解题方法。可见,数学符号是表达数学思想的工具,数学符号美学的非功利性是表达数学思想工具的性能。运用数学符号美学的非功利性能诱发联想,由眼前的数学对象及数学符号联想到相关的对象,从而促进抽象思维的发展。

3 刺激探索,促进数学抽象思维的发展

抽象思维是指舍弃同类事物非本质的属性或特征而抽取出其共同的本质属性或特征的思维形式。数学符号语言具有高度的抽象性,数学符号美学的非功利性一方面约减了表达,促进了数学抽象思维的发展。数学教学与学习中由于引进了专门的数学术语及相应的符号,数学符号语言就排除了多义性,实现了单义性和明确性,它能以简洁美的形式准确而清晰地表达和概括数学信息和规律,克服了用冗长且含混不清的日常用语去表达一个较复杂式子的缺点,这比起数学叙述语言,更显得简练和准确。如完全平方公式表述如表 1 所示。

表 1 完全平方公式表述对比

自然语言表达	数学语言表达
两数和(或差)的平方,等于两数的平方和,加上(或减去)这两个数的积的 2 倍。	$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

另一方面,数学符号美学的非功利性约减了运算,促

进了数学抽象思维的发展。为了解题的需要,有很多时候会用字母来代替一个表达式,从而节约了时间,简化了运算。如 $y = \sin x + \cos x + \sin x \cos x = \sin x + \cos x + [(\sin x + \cos x)^2 - 1]/2$,此时我们便可把 $\sin x + \cos x$ 看作 t ,从而化为 $y = t + (t^2 - 1)/2$ 。又如我们数学课上学习的数学公式、法则,在做题时可以直接套用,促进了数学抽象思维的发展,加速了思维的进程,减缩了思维过程,使思维变得简捷而迅速,使思维向更广阔的空间、更广泛的范围发展。同时,全世界数学界及科学界在基本的数学符号上是统一的,数学符号的统一是促成数学语言统一性的重要原因,这进一步促成了数学的普及和发展。

4 展开创造,促进数学创新思维的发展

创造或创造性活动,有两个显著的特点。一是首创性,新奇独特,前所未有的;另一种是社会性,即创造活动的产品要有社会意义,有一定的社会价值。数学家狄尔曼说:“数学能集中、强化人们注意力,能够给人以发明创造的精细和谨慎的谦虚精神,能够激发人们追求真理的勇气和信心,……数学更能锻炼和发挥人们独立工作精神。”这其中也暗含了数学符号美学的非功利性对创新思维的作用。当数学符号美学的非功利性激发思维,接着探索思维,紧接着沿着思维的路线就开始创造,进而缩减思维活动,加速思维进程,从而产生和触发了人们的创造性思维。如下案例就是很好的证明。

一位中学数学老师讲过这样一个例题:一个人在河里逆流游泳,在 A 处遗失了携带的水壶,它继续逆流游了 20 分钟才发现水壶失落,当即游回寻找,结果在距 A 处下游 2 千米的 B 处找到,求水流速度。经初步思考,创新思维可以发现可以基于以下两点:

a. 设水流速度为 x 千米/时,人的游泳速度为 y 千米/时,以水壶漂流 2 千米所用时间相等列等式 $20/60 + [20/60 \cdot (y - x) + 2]/y + x = 2/x$,得出 $x = 3$ 。

但有些同学觉得此解法太过繁琐,试图寻找简便的方法。于是从解法 1 结果出发,根据已知条件数据与结果数据,创造性地得出 $3 = 3/(2/3)$,从其内涵细细琢磨,探究源头,注重数学符号的理解、运用和表达能力,验证其正确性,得出解法 2。

b. 由于水壶是动的,它随水而下,漂流了 2 千米,这 2 千米是在 40 分钟内完成的,故水流速度 $= 2/(2/3) = 3$ 。

解法 2 比解法 1 简洁明快,其关键就是较好地处理了动静之间的转化,是“以静制动”的思想,这个机智的数学念头是由准备的思考和解题经验长期积累的升华,也是数学符号美学的非功利性对创新思维的作用。因此,在教学中为了利用数学符号美学的非功利性对数学思维的创造,教师要注重强化学生对数学符号正确的理解、运用和表达,关注其指示功能。

参考文献:

[1] 刘云章. 数学符号学概论[M]. 合肥:安徽教育出版社,1993.
[2] 任樟辉. 数学思维理论[M]. 南宁:广西教育出版社,2001.