高等数学课程中若干难点的教学策略

——以微积分为例

段　玉，王敬童
（湖南商学院 数学统计学院，湖南 长沙 410205）

摘　要：高等数学是大学低年级普遍开设的基础课，对学生数学思维的训练、数学方法的掌握和数学能力的提高都有着重要作用。在高等数学教学过程中，应注重数学语言、数学符号的应用与训练，注重数形结合的应用，适时展现各知识模块的联系，进行关于某一概念的联想训练，注重教学方法的总结，才能达到良好的教学效果。

关键词：高等数学；难点；教学策略
中图分类号：G64　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674－5884(2014)06－0061－03

高等数学是大学低年级普遍开设的基础课。它对学生数学思维的训练、数学方法的掌握和数学能力的提高都有着重要作用。学生对高等数学掌握的好坏还直接关系到对后续课程的学习和掌握。但在学习过程中，学生普遍感到上课能听懂，教材能读懂，就是不太会做习题。尽管教师、学生都下了不少功夫，但到期末考试时，挂科率较高的大多是高等数学，研究生考试落选的大多也是因为高等数学成绩较低[1]。究其原因，除了高等数学本身较为抽象、学生对大学的学习还不适应等因素以外，还与教师的教学理念、教学态度、教学方法、对教材的理解、课堂运作能力、教学策略等因素有密切关系。教师必须结合高等数学本身的特点，从学生的实际出发，采用适当的策略进行有效教学，才能达到良好的教学效果。

1　注重数学语言、数学符号的应用与训练

任何一门数学课程都是一个特殊的符号系统，都有其相应的语言与符号，微积分也不例外。学会使用数学语言和数学符号，对培养学生数学素质非常必要。

一方面，熟练使用数学语言与数学符号，可以表达深刻的数学思想与操作性的数学方法。例如，微积分的基本公式：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$[2]，这个公式表明，一个连续函数在$[a,b]$的定积分等于它的任意一个原函数在$[a,b]$上的改变量。它不仅揭示了定积分与被积函数的原函数之间的联系，也给定积分的计算提供了一个有效而简便的方法。

另一方面，熟练使用数学语言与数学符号，不仅对学生理解概念的内涵与定理的作用大有帮助，而且在很大程度上决定了是否能顺利地完成课后的作业。例如，不定积分的换元积分法，如果只按照教材讲解，学生很难理解，更不知道如何将此法则与解题联系起来。笔者在教学过程中根据换元积分法法则给出了一个清晰的用数学语言表达的计算程序：

第一类换元积分法：

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{分解}} \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{凑微分}} \int f(\varphi(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal[u=\varphi(x)]{\text{作代换}} \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c \xlongequal[u=\varphi(x)]{\text{反代}} F(\varphi(x)) + c$$

第二类换元积分法：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal[x=\varphi(t)]{\text{作代换}} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c \xlongequal[t=\varphi^{-1}(x)]{\text{反代}} F(\varphi^{-1}(x)) + c$$

通过例题分析，学生很快掌握了换元法的基本思想与方法。

2　注重数形结合在教学中的应用

所谓数形结合，就是把数量关系的准确刻划与几何

收稿日期：2014－01－30
基金项目：湖南省教育科学十二五规划课题“企业在岗技术人员继续教育”企校所“模式研究”（XJK011CCG005）；湖南商学院校级重点课题“基于专业群为教学单元的公共数学课分类教学研究”
作者简介：段　玉（1958－），女，湖南常德人，副教授，主要从事高等数学教学研究。

图形的直观描述有机地结合起来,从而充分揭示问题的条件与条件、条件与结论之间的内在联系。数形结合的思想可以使某些抽象的数学问题直观化、生动化,能够变抽象思维为形象思维,有助于把握数学问题的本质;另外,由于使用了数形结合的方法,很多问题便可迎刃而解。要注意培养学生这种思想意识,争取胸中有图,见数想图,以开拓学生思维的视野,有助于提高学生分析问题和解决问题的能力。

例如,笔者在讲解罗尔中值定理时,有意将此定理用几何图形进行解释,将定理的条件与结论直观地表述、展现在学生面前,并由此证明此定理。学生很快就掌握了此定理、定理的证明及定理的应用。同时特别提醒同学注意:若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立,定理的条件只是充分的。例如,以下三个函数[2]分别不满足罗尔定理的三个条件:

(1)$y = \begin{cases} x & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ 不满足定理的第一个条件,其几何图形见图 1。

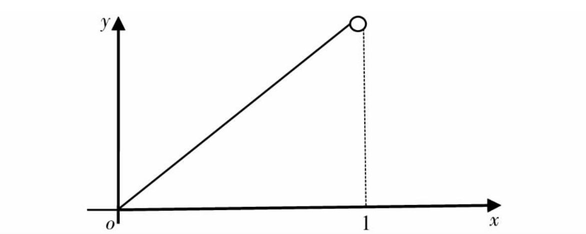

图 1

(2) $y = |x|, x \in [-1,1]$ 不满足定理的第二个条件,其几何图形见图 2。

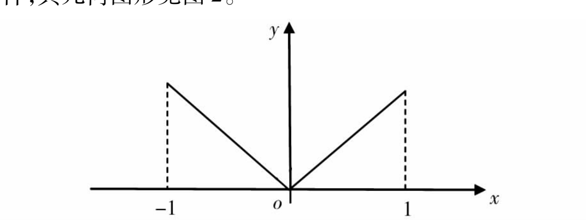

图 2

(3) $y = x, x \in [0,1]$ 不满足定理的第三个条件,其几何图形见图 3。

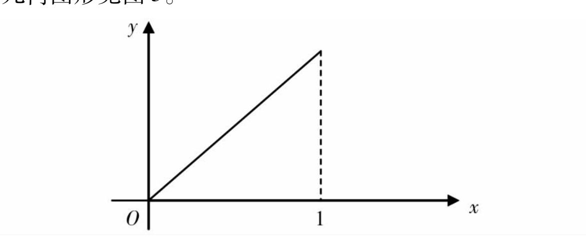

图 3

从以上三个函数的几何图形可以看到它们都不能在各自的定义域内找到 ξ,使 $f'(\xi) = 0$;

而对于函数

$y = \begin{cases} \sin x & x \in [0,\frac{3\pi}{4}) \\ x & x \in (\frac{3\pi}{4},\pi] \end{cases}$,其罗尔定理的三个条件都不满足,但 $\xi = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$ 时,有

$$f'(\xi) = 0 \text{ 成立。}$$

又如,引入变上限积分函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 时,画出以 $f(x)$ 为曲边在 $[a,b]$ 上的曲边梯形,当 $x \in [a,b]$ 时,得到曲边梯形:$y = f(x), y = 0, x = a, x = x$,其所围成的面积为 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,当 x 在 $[a,b]$ 取不同值时,$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也随之变化着,即:$x \leftrightarrow \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi(x)$,这样就很直观地给出了变上限积分函数,如图 4。

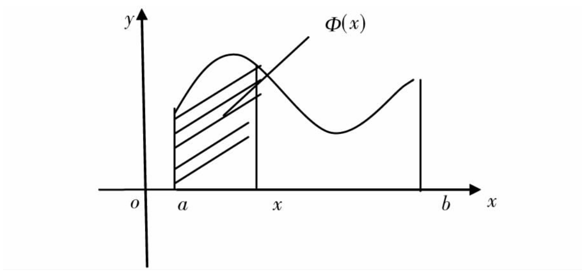

图 4

3 注重适时展现各知识模块的联系

微积分的知识模块较多,由于受编排体系的限制,许多重要概念之间的关系仅是单向的,逆向的联系并没充分反映出来。教师应在教学过程中适当地展示概念产生的实际背景,一个概念与另一个概念的联系与区别,将知识点编织成网,以点带面,融会贯通。教一个概念时复习多个概念,教一个定理时复习多个定理。

例如,笔者在讲授变上限积分函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 时,特别强调“函数”二字。既然是“函数”,就有必要讨论其极限、连续、导数、微分等,从而将变上限积分函数与微积分中的这些重要概念联系起来。笔者让学生对 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的连续性、可导性等进行讨论,提出问题:(1) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在什么条件下连续?(2) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在什么条件下存在导数?它的导数 $\Phi'(x)$ 与被积函数 $f(x)$ 有什么关系?通过讨论许多学生能给出正确的结论。于是,笔者顺着学生的思路总结出定理:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则(1) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续;(2) $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内可导,且 $\Phi'(x) = f(x)$。并指出这条定理不仅回答了笔者在“不定积分”一

章开始时提出的问题:“什么样的函数存在原函数”,而且也给出了求变上限积分函数的导数的方法。

4　注重概念的联想训练

在教学中,笔者经常让学生进行关于某一概念的联想,以加深对这一概念的理解。弄清这一概念与其它概念的联系与区别,提高应用概念的灵活性。这样做有助于从根本上解决不会做习题的问题。比如,“函数的极限”能联想到的知识点就有:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续;

(4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续;

(5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=A\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导,且 $f'(x_0)=A$;

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}S_n=s\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛且收敛于 s, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$(其中 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$) 等等。

5　注重教学方法的总结

微积分涉及的计算较多,其中一些计算应熟练掌握。教师在教学中应对此有所侧重,更应注重引导学生掌握计算原则与计算方法。例如,不定积分的分部积分法,若仅根据教材讲解(一般教材在这一部分只给了几个简单的例题),学生只会知其然不知其所以然。笔者在教授不定积分的分部积分法时,通过例题引导学生总结:如何选择 u、v, 将不易积的积分 $\int uv'\mathrm{d}x$ 通过公式 $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$ 转换成求积分 $\int u'v\mathrm{d}x$。其原则:(1) v 要很容易求得;(2)转换后的积分 $\int u'v\mathrm{d}x$ 也要很容易求出,即直接利用基本的求导公式或者导数运算法则就可求得。其方法:(1)若被积函数为多项式×指数函数,则选 u 为多项式;(2)若被积函数为多项式×弦函数(正弦或余弦),则选 u 为多项式;(3)若被积函数为指数函数×弦函数,则选 u 为指数函数或弦函数均可,但必须贯穿一致性原则;(4)若被积函数为多项式×反函数($\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot}x$) 时,则选 u 为反函数;(5)若被积函数含有 $\ln f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\arctan f(x)$, $\mathrm{arccot}f(x)$ 时,选 $u=\ln f(x)$ 等。这样,学生较容易地理解了部分积分公式并用此公式解题。

实践证明,只要在高等数学的教学过程中主动、适时采用上述策略,即注重数学语言、数学符号的应用与训练,注重数形结合在教学中的应用,适时展现各知识模块的联系,经常进行关于某一概念的联想训练,注重教学方法的总结,加之教师对专业的热爱和对本职工作、对学生认真负责的态度,并不时地加入一点点风趣幽默的元素,就会使得学生在轻松和谐中度过一堂紧张的数学课,就会取得良好的教学效果。

参考文献:

[1] 段　玉. 关于财经类专业《概率论与数理统计》课程体系改革探讨[J]. 教师,2009(3):15-18.
[2] 曹定华,李建平. 微积分[M]. 上海:复旦大学出版社,2011.

(责任校对　晏小敏)