激发生成,促成内化:线性代数教学研究

刘金容
(海南大学 信息科学技术学院应用数学系,海南 海口 570028)

摘　要:分析线性代数的教学现状,结合多年的教学经验,借鉴国内外先进的教育理念,开展以"激发生成,促成内化"为目标的线性代数教学研究。加强背景知识介绍,并根据专业线性代数与其它学科的联系,引入抽象概念;对不同专业增设不同应用实例,从解决问题需要,激发学生生成知识;教学中突出比较学习,培养学生的类比思维,并促成内化知识;鼓励学生探求一题多解,培养学生的发散思维,激发知识生成;教学中注重使用反例论证,培养学生的批判性思维,促成知识的内化;创设多样化的学习平台与评价方式。

关键词:激发生成;促成内化;行列式;矩阵;向量
中图分类号:G642.0　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-5884(2014)02-0101-03

线性代数以研究有限空间线性理论为主要内容,由于线性问题广泛存在于科学技术各个领域,并且非线性问题也经常转化为线性问题来处理,因而线性代数已成了许多自然科学和现代工程技术的基础,是解决实际问题的有力工具,应用非常广泛。对大学生来说线性代数是最主要的工科数学之一,同时也是研究生入学考试必考科目,是科学与技术的语言,同时是后继课程的基础,学好它非常重要。

1　线性代数教学的现状分析

经调查统计,目前高校线性代数课时占32~48课时,而线性代数概念抽象,理论深刻,内容零散,计算繁杂,与几何密切相关的特点,课时相对偏少,因而现行线性代数教学从内容层次看,大多数仍采用传统的"概念~定理~例题~习题"的模式,过于强调理论知识,强调数学的严谨性和系统性,侧重于学生对纯数学方法和技巧的学习。由于"大容量"、"高密度"、"满堂灌",知识呈现方式"被动",很难有生成性资源的立足之地,学生课上记笔记,课后模仿笔记、例题作业,期末考笔记。这种忽视学生探究品质和学生个性的自由发展、忽视知识自然生成和知识的内化的逻辑规则的教学,抑制了课堂教学中学生的能动性和内发性,否定了教学中的动态生成性,导致个人知识的获得普遍缺乏个体思维的深层参与,学生的变异、批判与创造的品质被剔除,探究、建构与超越的个性被削弱。其最终结果是公共知识不能内化为个体知识,思维不能凝结成思想,方法不能升华为智慧,学生的个人认识普遍僵化,很难有效获得真知与创造性,以至于学生数学学习的积极性逐步下降。基于上述原因,结合多年的教学经验,学习国内外先进的教学理念,提出以"激发生成,促成内化"为目标的线性代数教学进行了以下几方面的思考与探索。

2　教学改革措施

2.1　加强背景知识介绍

教材第一章就遇到"行列式"这一抽象概念的教学,讲解不好,将影响学习的积极性及后续内容的学习。笔者针对不同专业做不同处理,对文科专业的学生采取加强背景知识的介绍,介绍了行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来,行列式的提出可以追溯到17世纪,最初的雏形由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼兹各自独立提出,时间大致相同。它当初只作为解方程组的工具出现时,只是一种速记的表达式,在很长一段时间内,行列式都只作为解线性方程组的重要工具被使用着,并未形成独立的理论体系,首个把行列式理论与线性方程组求解相分离的人是法国的数学家范德蒙德,之后,在行列式理论方面作出突出贡献的数学家还有柯西、雅可比等等。这些背景知识的介绍帮助充实教学内容,使其更加生动有趣,学生对这些数学家充满好奇和崇拜,他们渴望了解这些数学家的具体工作,自然在学习过程中积极寻找答案。从以教师的教为本位,回归到以学生自己主动去学为本位的数学教学观。

2.2　突出与其它学科的紧密联系

就拿"行列式"这一概念教学来说,针对学生原有的知识结构不同,笔者对理工科的学生采取了另一种引入方式,学生刚学完高等数学,才开设的线性代数。行列式在数学中,是一个函数,其定义域为 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$(矩阵概

收稿日期:2013-11-25
作者简介:刘金容(1979-),女,湖南娄底人,讲师,硕士,主要从事数学教育教学研究。

念以后待学，留下悬念），取代为一个标量，写作 det($\boldsymbol{A}$)或 $|A|$。行列式也可以看作是有向面积或有向体积概念在一般的欧几得空间中的推广。或者说在 n 维欧几里得空间中，行列式描述的是一个线性变换对“体积”所造成的影响 。无论是在线性代数，多项式理论还是在微积分学中（比如换元积分法中）行列式作为基本的数学工具，都有着重要的应用。接着解释二阶行列式对应几何意义是二维向量的有向平行四边形的面积。二阶行列式为零，当且仅当 2 个向量共线（线性相关待学，留下悬念），这时平行四边形退化为一条直线。三阶行列式几何意义对应三个向量为棱的平行六面体的有向体积，也叫做这三个向量的混合积。同样可得如下性质：三阶行列式值为零当且仅当 3 个向量共线或共面（三者线性相关），这时平行六面体退化为平面图形，体积为零。再引入 n 维向量到 n 阶行列式，n 元线性方程组，从一开始让学生深切感受到线代与解析几何，高等数学等学科的紧密联系，在以后的教学中也经常突出线代与其它课程的联系。让学生有兴趣，有动力去建构知识。

2.3 对不同专业应用不同实例，激发学生知识生成

针对经管类学生，在讲授矩阵乘法公式之前，选取了一个常用又简单的实例。

例 1：某工厂生产 3 种产品，各种产品每件所需的生产成本以及各个季度每一产品的生产件数见表 1 和表 2。

请给出一张指明各个季度所需各类成本的明细表。

又比如对化工专业讲授“线性方程组的解”，给出了下面例子，

例 3：一个化学方程式：

$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$

表 1 生产成本（单位元）

成本	A	B	C
原村料	0.10	0.30	0.15
劳动量	0.30	0.40	0.25
管理费	0.10	0.20	0.15

表 2 生产件数（单位件）

产品	春	夏	秋	冬
A	400	400	450	450
B	220	200	260	240
C	600	580	620	600

为了配平这个化学方程式，需找到 x_1, x_2, x_3, x_4 使方程式左右两端的碳原子数（C）、氢原子（H）和氧原子（O）的总数相等。建立在反应过程中每种原子数目的数学模型：

$$\begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ 8x_1 = 2x_4 \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

利用矩阵的初等行变换，可得方程组的通解为

$x_1 = \frac{1}{4}x_4, x_2 = \frac{5}{4}x_4, x_3 = \frac{3}{4}x_4, x_4$ 为自由未知量

由于化学方程式中的系数必须为整数，（般用最小整数）可取 $x_4 = 4$，此时配平后的化学方程式为：$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$.[1]

又如信息学院学生讲解逆矩阵时，引入密码问题等等不一一例举，总之针对学生专业，也就是对学生原有的知识结构不同的基础上，重新构建线性代数知识，是建构主义教学观的体现 ，一方面让学生主动去构建新知识，另一方面，让学生明白线性代数在专业课程中的实用性。

2.4 教学中突出比较学习，培养学生的类比思维，并促成内化知识

比如讲授余子式和代数余子式，让学生自己对比得出了以下结论：

（1）对于给定的 n 阶行列式 $\boldsymbol{D} = \det(a_{ij})$ 元 (i,j) 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅对位置 (i,j) 有关，而与 $\boldsymbol{D}$ 的 (i,j) 元的数值无关。

（2）它们间的联系是 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，因而当 $i+j$ 为偶数时，二者相同，当 $i+j$ 为奇数时，二者符号相反，它们之间的关系也可用图示来表示，

$$\left|\begin{array}{cccccc} + & - & & \cdots & & \\ - & + & - & \cdots & \cdots & \\ + & - & + & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & + & - \\ & & {}''\cdots & + & - & + \end{array}\right|$$

其中，符号“ + ”表示对应位置上 $A_{ij} = M_{ij}$；符号“ - ”表示对应位置上 $A_{ij} = -M_{ij}$，上图概括为：对角线上为正，正的“邻居”为负，负的“邻居”为正。

学生自己归纳对比得出结论，学生内化成了个体知识，在考试中就很少出现 A_{ij} 符号错误现象。在教学中经常对一些既有联系又有区别的概念，定理让学生自己去对比分析其区别与联系。不仅有利类比思维的培养，还利于促成知识的内化。比如行列式与矩阵的联系与区别；矩阵的等价与向量组的等价的区别与联系，行阶梯形矩阵与行最简形矩阵，矩阵的秩与向量组的秩等等，线代中这种易混概念好多。基本方法的总结，如行列式的计算探讨，矩阵初等变换的应用，逆矩阵的求法探讨；用小课题或开放式作业方式要求学生课外完成。能满足不同专业不同层次的学生的需求。学生通过对这些开放性作业的完成，激发学生的学习兴趣，充分利用网络学习，加深对基本概念的理解，对基本方法与基本技能的掌握。

2.5 鼓励学生探求一题多解，培养学生的发散思维

一题多解是由同一问题在解法上引起发散思维，对某一问题的一种新的解法 ，很可能意味着一次新的突破。所以在教学中经常鼓励学生探求一题多解，有利如知识的生成。如教材[2]课后题很多题是有多种解法的，P27：8（1）题。

8（1）计算 $\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0.

解：（方法一）

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 1 & & a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一行}} a \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ & & a \end{vmatrix}_{n-1} + 1 \cdot (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\overset{\text{第二个行列式}}{\underset{\text{按第一列展开}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} a\cdot a^{n-1} + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ & & & a\end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= a^n - a^{n-2}$$
$$= a^{n-2}(a^2-1)$$

（方法二）

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & 1\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a\end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}} a\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a & & & 1\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a\end{vmatrix}_{n-1} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}} a\cdot a\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a & & & 1\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a\end{vmatrix}_{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\xlongequal[\text{次展开后}]{\text{经过}n-2} a^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1)$$

方法二做完第一步后得 $D_n = aD_{n-1}$ 于是递推可得结论。

（方法三）

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & 1\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a\end{vmatrix} \xlongequal{r_n-\frac{1}{a}r_1} \begin{vmatrix} a & & & 1\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-\dfrac{1}{a}\end{vmatrix} = a^{n-1}\left(a-\frac{1}{a}\right) = a^{n-2}(a^2-1)$$

看似简单的一道行列式计算,确是一个引起发散思维的很好素材,可以借此在习题课中总结行列式计算常用的方法。课后很多习题都是有多种方法求解的,鼓励学生探求一题多解,能帮助学生知识的内化与生成。

2.6　培养学生批判性思维,促成知识内化

反例在线性代数教学中有其特殊作用,寻求反例的过程,是加深理解、巩固知识的过程,也是培养学生的批判性思维与辩证思维过程,通过引导学生如何寻求反例,激发学生对数学学习的兴趣,从而使教学收到事半功倍的效果。

如:从群的角度,零矩阵和实数 0 都是群的单位元。但是在实数中 0 是一个数,而在矩阵中,零矩阵并不是一个矩阵,而是一类矩阵的统称。实数 0 = 0 成立,而矩阵 $\boldsymbol{0}$ = 矩阵 $\boldsymbol{0}$ 未必成立。

举反例 1:$0_A = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 0_B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 由于矩阵相等的前提是两个矩阵同型,而 $0_A, 0_B$ 不同型列数不等,因而不等。这个反例可同时说明在矩阵中,一般而言 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}$,只有当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵时该式才成立。

又如:在小学接触乘法时,定义是加法的简便运算,在矩阵运算中由于数乘是通过数作用于每一个元素上来实现,因在在矩阵运算中,数乘是矩阵加法的简便运算,而矩阵乘法与数乘法有着截然不同的性质。

(1)数的乘法满足交换律,而矩阵乘法不具备,即在矩阵乘法中 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ 未必成立。

构造反例 2:如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 7\end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 则 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}6 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 6\end{pmatrix}$.

这里反例的构造,利用了初等矩阵的性质,左乘一个初等矩阵相当于对初等矩阵作初等行变换,而右乘一个初等矩阵相当于对矩阵做初等列变换,因此只要 $\boldsymbol{A}$ 矩阵不是对称矩阵,$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$。

(2)数乘法有消去律,而矩阵乘法中消去律也未必成立,即 $AB = 0$ 未必 $A = 0$ 或 $B = 0$.

举反例 3:如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 显然 $\boldsymbol{A} \neq 0, \boldsymbol{B} \neq 0$ 而 $\boldsymbol{AB} = 0$。[3]

此外向量的线性表示,线性相关性等是线性代数课程教学中的重点与难点问题,这部分内容十分抽象,必须结合实例与反例讲述其中一些概念。

2.7　创设多样化的学习平台与评价方式

为了在学时不断减少的情况下保证教学目标的实现,在加强和提高有效的传统教学方法与手段的基础上,注重了现代教学手段的建设和合理应用,除实施多媒体教学大大提高教学效率外,还积极创造条件,建立网络课外自主学习系统,提供课堂教学内容的辅助学习资源:线代视频课件,线性代数 *PPT*、网上答疑,线性代数习题库等,实现多媒体与网络化,从而使课堂教学与课外学习有机结合。评价方式采取综合评定,平时考勤、普通作业 15%,开放作业 15%,期末考试占 70%。为了增加考试的信度,在考题中采取了弹性设计,比如可以从 150 分的考题中选取 100 分考题做,加大了考题的覆盖面。

3　总　结

数学教师的使命不仅仅是传授,知识的更重要的是将数学方法这一工具服务于社会各行各业,要让学生明白数学来源于实践,最终也要回归到实践中去解决实际问题。通过以"激发生成,促成内化"为目标的线性代数教学改革,提高学生的学习积极性,并培养学生解决实际问题的能力,为今后的学习和工作奠定坚实的基础。

参考文献:

[1] 谢国瑞. 线性代数及应用[M]. 北京:高等教育出版社,2005.

[2] 陈怀深. 线性代数实践及 MATLAB 入门[M]. 北京:电子工业出版社,2009.

[3] 孙　兵. 线性代数教学中的反例构造[J]. 数学理论与应用,2011(6):39-40.

（责任校对　谢宜辰）