doi:10.13582/j.cnki.1674-5884.2019.06.016

应用闭链机构公约束模型扩充自由度计算教学研究

邓孔书[a],曾露[a],尹祝融[a],李媛媛[b]
(湖南科技大学 a. 机械设备健康维护湖南省重点实验室/先进矿山装备教育部工程研究中心; b. 艺术学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:机构自由度是“机械原理”教学中一个最重要的概念,是认识任何创新机构的前提和基础。针对目前机械相关专业“机械原理”教学中存在的机构自由度讲授思路单一性问题,以培养学生创新思维为目标,启发学生从多维度理解机构自由度概念,本文在原有的机构自由度讲授思路基础上,提出辅以单个独立闭链机构具有 3 个公约束模型的自由度教学新思路,为面向“一带一路”培养我国新时代具有创新思维人才提供教学模式借鉴。

关键词:机构自由度;教学;闭链机构;3 个公约束;创新型人才
中图分类号:G642　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-5884(2019)06-0075-05

1　前言

“机械原理”课程是一门专业技术基础课,是机械相关专业的必修课程,其主要教学目标是使学生掌握机构学和机械动力学的基本理论,基本知识和基本技能,并初步具有拟定机械运动方案、分析和设计机构的能力[1]。而对于机械运动方案的分析和设计就是要求学生能够正确地选择和设计合理的机构方案,该方案的合理与否对于机械产品是至关重要的,产品的其他设计内容都是在这个基础上建立起来的。对机械产品的设计过程实际上就是产品的创新过程,其本质的内容就是机构创新[2]。因此,机构创新是机械产品创新中非常重要和基本的部分,是维持和发展我国机械产品在世界机械市场中比重的关键,是实现我国机械行业可持续发展的基石[3]。而对于任何创新机构最基本和首要的认识就是它的自由度,因此,机构自由度的教学效果对于激发所授学生的机构创新意识具有直接的影响,并对学生将来创新思维的培养产生不可忽视作用。

然而,目前对于机构自由度的教学思路比较单一,主要是通过活动构件本身所具有的自由度减去运动副所带来的约束总数来求得。

本文将结合理工科教学内容安排,以培养学生创新思维为目标,启发学生从多角度理解机构自由度概念,并在原有的机构自由度讲授思路基础上[4-5],提出辅以基于闭链机构公约束模型的自由度教学新思路,为面向“一带一路”培养我国新时代具有创新思维人才提供一种教学模式借鉴。

2　机构自由度概念及目前教学思路

2.1　机构自由度概念

平面机构具有确定运动时所必须给定的独立运动参数的个数,称为机构的自由度[6]。

2.2　传统自由度教学思路

首先,传统自由度教学是通过介绍构件、机构的含义,从而引入运动副。接着,从运动副所带来的约束角度出发,进而得到计算机构自由度的方

收稿日期:20190905
基金项目:湖南科技大学教育教改项目(J81202);湖南省自然科学面上基金(2018JJ2122);道路施工技术与装备教育部重点实验室(300102259509)
作者简介:邓孔书(1978-),男,湖南郴州人,副教授,博士,主要从事机械工程研究。

法。在平面机构中，每个独立的自由运动构件具有两个方向上的移动自由度和一个转动自由度，而当两个及两个以上的构件通过运动副连接后，所形成的每个平面高副为机构带来一个约束，每个平面低副为机构带来两个约束，假设所形成的平面机构中共有 n 个运动构件，低副的个数为 p_L，高副的个数为 p_H，则机构共有（$2p_L+p_H$）个约束，此时平面机构的自由度[10]为

$$F = 3n - 2p_L - p_H. \tag{1}$$

求图 1 所示平面四杆机构的自由度。

在图 1 所示最简单的四杆机构中，由机构简图可看出，该机构共有 4 个构件，但运动构件个数为 3，包含 0 个高副，4 个低副（即 4 个转动副），故根据平面自由度计算公式（1）可知，该四杆机构的自由度：

$$F = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1. \tag{2}$$

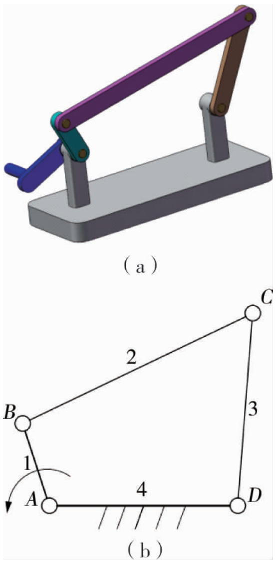

图 1　四杆机构及其机构简图

但需要值得注意的是，在进行机构自由度计算时，应排除局部自由度数目以及从机构的约束数中减去虚约束的个数，故机构的自由度：

$$F = 3n - (2p_L + p_H - p) - \beta. \tag{3}$$

式中：p 为虚约束的个数；β 为局部自由度数。

以计算图 2 所示机构的自由度为例。

由图 2 可以看出，该机构简图含有运动构件 9 个，高副 3 个，低副 11 个，C 与 H 两处滚子处各形成 1 个局部自由度，即 $\beta=2$，杆件 8 是虚约束，即 $P=1$，故由自由度计算公式（3）可知：

$$F = 3 \times 9 - (2 \times 11 + 3 - 1) - 2 = 1. \tag{4}$$

目前传统自由度的教学思路基本都是：机构自由度等于活动构件所带来的自由度总数减去运动副所带来的约束总数求得，其教学思路比较单一，不利于学生将各科知识进行融合，同时也不利于学生发散性思维的培养。虽然平面机构自由度的计算公式看起来非常简单，但学生计算起来又容易出错，对于一个稍微复杂的机构简图自由度计算，往往不是简单的套用公式，还需要考虑局部自由度、复合铰链、以及虚约束等情况[7]。通过多年的教学实践发现，学生认为两类平面机构的虚约束为学习难点，一类是两个构件之间构成多个导路平行的移动副时组成虚约束，另外一类为如果两个构件在多处相接触构成平面高副且各接触点处的公法线重合时构成虚约束[8]。学生对这两类虚约束难以理解，因此，为了开拓学生的视野，打破传统自由度教学固有模式，培养学生多维度看问题的方式，探索机构自由度计算新的辅助教学方法已成为一个亟待解决的问题。

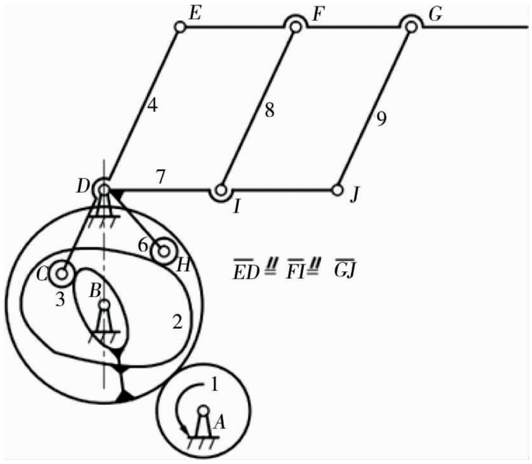

图 2　包装机送纸机构简图

3　基于螺旋理论的机构自由度教学

3.1　螺旋理论简介

螺旋理论[9]诞生于 19 世纪，螺旋又名“旋量”，由一组空间对偶矢量构成，站在几何学角度，螺旋可被用来表示直线在空间的任意位置和方向；站在力学角度，螺旋能被用来表示力或者力矩；站在物理学角度，螺旋可以用来表示运动学中物体的角速度或线速度；站在机构学角度，对平面机构进行自由度分析时，螺旋又能够用来表示运动副是转动副还是移动副[10]。Plucker[11]用 6 个标量形成的线矢量来表示空间中直线的位置和方向，机构中所有运动副都能用螺旋来进行表示。

3.2　运动副的螺旋表示

3.2.1　转动副的螺旋表示

两构件之间的相对运动为转动的运动副称为转动副[12]，也被称之为铰链。用螺旋表示为：

$$\$=(S;S_0);S\cdot S_0=0. \tag{5}$$

其中，转动副轴线的方向用 S 的三个坐标表示，S_0 与转动副轴线的位置有关。当转动副轴线与 Z 轴平行时，即表示轴线方向的 S 矢量中 x 与 y 坐标为 0，此时转动副的线矢量可表示为：

$$\$=(0\ 0\ 1;a\ b\ 0). \tag{6}$$

3.2.2　移动副的螺旋表示

两构件之间的相对运动为移动的运动副称为移动副[13]，用螺旋表示为

$$\$=(0;\mathrm{S}). \tag{7}$$

其中，S 是移动副的导轨方向，当移动副的导轨方向垂直于 Z 轴时，此时移动副的线矢量可表示为：

$$\$=(0\ 0\ 0;c\ d\ 0). \tag{8}$$

试用“螺旋”表示图 3(a)所示滚子推杆凸轮机构的各运动副。

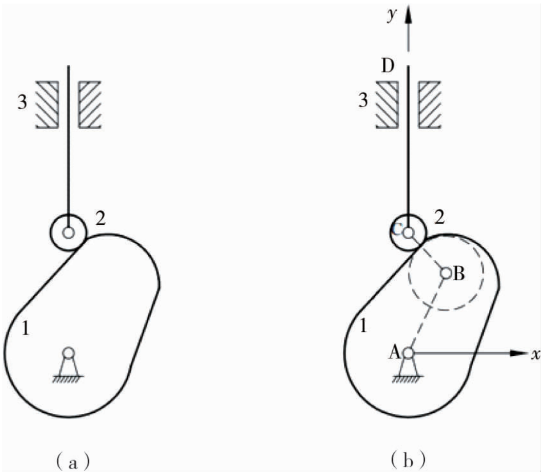

图 3　滚子推杆凸轮机构

分析：首先，对滚子推杆凸轮机构进行如图 3(b)所示的“高副低代”，并建立坐标系，则该机构运动副分别用螺旋表示为

A 点处的转动副：$\$_A=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)$；$B$ 点处的转动副：$\$_B=(0\ 0\ 1;d_2\ e_2\ 0)$；

C 点处的转动副：$\$_C=(0\ 0\ 1;\mathrm{d}_3\ 0\ 0)$；$D$ 点处的移动副：$\$_D=(0\ 0\ 0;0\ e_4\ 0)$。

式中的 Plucker 坐标元素 d_i 和 e_i 与机构运动副的轴线位置相关，不需具体求出，因为矩阵在进行初等行变换时对于求反螺旋的坐标与个数没有影响。

设反螺旋$\$_i^r=(x_1 x_2\ x_3;\ x_4 x_5\ x_6)$；根据互易积 $\$\circ\$_i^r=0$，则有：

$$\begin{cases} x_6=0 \\ d_2x_1+e_2x_2+x_6=0 \\ d_3x_1+x_6=0 \\ e_4x_2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

矩阵的秩 $r=3$，反螺旋的个数为 $n-r=6-3=3$，求得反螺旋为

$\$_1{}^r=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)$；$\$_2{}^r=(0\ 0\ 0;1\ 0\ 0)$；$\$_3{}^r=(0\ 0\ 0;0\ 1\ 0)$.

这三个反螺旋说明了该机构中任何构件都不能绕着 X 轴或者 Y 轴进行转动，也不能沿着 Z 轴方向进行移动。由于得到反螺旋的数目为 3，故该机构就具有 3 个公共约束(反螺旋的数目等于机构公共约束的数目)，从此滚子推杆凸轮机构不难联想到对于所有的平面机构，组成平面机构的所有转动副由于它们的轴线是互相平行的，当把轴线方向选定为坐标系的 Z 轴后，则任何平面机构的转动副用螺旋表达出来后，其中的第一、第二以及第六个元素必为零；而对于移动副来说，其螺旋的线矢量表示必定为$\$=(0\ 0\ 0;a\ b\ 0)$的形式。当平面机构中含有高副时，通常经“高副低代”得到的也是轴线互相平行的转动副，根据互易积为零，仍会求得反螺旋为 3 个，即公共约束为 3 个。

证明：对于平面单环机构，它有 n 个运动低副(高副进行低代后可转化为低副)，n 个运动副用 n 个螺旋表达出来，其螺旋系可表示为

$\$_1=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)$；$\$_2=(0\ 0\ 1;d_2\ e_2\ 0)$；$\$_3=(0\ 0\ 1;d_3\ e_3\ 0)$……$\$_{n-j}=(0\ 0\ 1;d_{n-j}\ \ e_{n-j}\ 0)$……$\$_n=(0\ 0\ 0;d_n\ e_n\ 0)$

同理：设反螺旋$\$_i^r=(x_1 x_2\ x_3;\ x_4 x_5\ x_6)$；根据互易积$\$\circ\$_i^r=0$，则有：

$$\begin{cases} & & & & x_6 & = & 0 \\ d_2x_1 & + & e_2x_2 & + & x_6 & = & 0 \\ d_3x_1 & + & e_3x_2 & + & x_6 & = & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ d_{n-j}x_1 & + & e_{n-j}x_2 & + & x_6 & = & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ d_nx_1 & + & e_nx_2 & & & = & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ d_{n-j} & e_{n-j} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & \vdots & & & \\ d_n & e_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

系数矩阵的秩 $r=3$，反螺旋的个数为 $n-r=6-3=3$，求得反螺旋为

$\$_1{}^r=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)$；$\$_2{}^r=(0\ 0\ 0;1\ 0\ 0)$；$\$_3{}^r=(0\ 0\ 0;0\ 1\ 0)$.

故对于任何平面单环机构来说它们的反螺旋个数都是 3，换句话说，单个独立封闭环形成的公共约束是 3；若不从运动构件为机构带来的自由度出发，而从每个运动副为机构所引入的自由度角度看，高副为机构引入 2 个自由度，低副（包括移动副与转动副）则为机构带来 1 个自由度，单个独立闭环为机构带来 3 个公共约束，则对于平面机构自由度有以下计算公式：

$$M=\sum_{i=1}^{2}(3-i)p_i-3K=\sum_{i=1}^{2}(3-i)p_i-3(f-n). \quad (11)$$

式中：P_i 是具有 i 个约束的运动副个数；K 是机构独立封闭环的个数；f 是机构运动副的总数；n 是机构运动构件数。

同样考虑机构的虚约束与局部自由度，则有

$$M=\sum_{i=1}^{2}(3-i)p_i-3(f-n)+\phi-\upsilon. \quad (12)$$

式中：ϕ 是机构的虚约束数；υ 是机构的局部自由度。如用此公式计算图二所示包装机送纸机构的自由度：该机构高副有 3 个，低副有 11 个，运动副的总数 $f=11+3=14$，$\upsilon=2$，$\phi=1$，带入式（12）可得：

$$M=\sum_{i=1}^{2}(3-i)p_i-3(f-n)+\phi-\upsilon=2\times 3+1\times 11-3(14-9)+1-2=1. \quad (13)$$

通过计算我们不难发现，基于螺旋理论推导出来的闭链机构公约束模型计算出的自由度与传统公式计算出的自由度结果一致，这表明不管是从活动构件所带来的自由度角度出发，还是从平面机构运动副所带来的自由度个数看，它们最终得到的答案都是相同的，正所谓“条条道路通罗马”，就好比一个人走了两条路，起点不同，路线不一致，但最后的终点却是相同的。在实际教学中采用上述基于螺旋理论的机构自由度教学思路[14]，取得了较好教学效果，能够调动学生上课思考问题的积极性，课堂氛围高涨。该教学思路设计符合本科阶段课程设置顺序，由于学生在此课程之前就已经学习了线性代数课程，为后续螺旋理论的学习做好了理论基础准备。同时也能够培养学生运用所学线性代数理论知识解决实际工程问题的能力，有利于学生将所学知识融会贯通，提高学生对专业课程的学习兴趣。

4　结论

本文针对目前机械相关专业“机械原理”教学中存在的机构自由度讲授思路单一性问题，启发学生从多角度理解机构自由度概念，从培养创新型人才为目标出发，并结合理工科教学内容安排，在原有的机构自由度讲授思路基础上，提出辅以基于反螺旋理论的自由度教学新思路。

综上所述，基于反螺旋理论的自由度教学思路与目前的教学思路相比，具有以下优势：（1）新的教学思路不仅引入了螺旋理论方面的知识，而且巧妙地将线性代数中的相关知识融入其中，使学生在学习机构自由度的同时还温习了线性代数的知识。这有利于激发学生应用知识的潜能，提高学生对基础课的学习兴趣。（2）新的自由度教学思路从运动副给机构带来的自由度出发，每个低副带来一个自由度，每个高副带来两个自由度，机构自由度等于运动副带来的自由度总数减去机构所形成的所有独立闭环的公共约束数。这有利于学生对于各科知识的融合，启发学生对创新机构的探索。（3）新的自由度教学思路一方面扩宽了学生自由度的视野，对螺旋理论有了初步的了解，另一方面使学生对自由度的概念有更深层次的理解。这有利于启发学生从问题的多维度、多

层次进行思路,对面向“一带一路”培养我国新时代具有创新思维人才具有最直接的影响。

参考文献:

[1] 叶仲和,蓝兆辉,M.R.Smith.机械原理[M].北京:高等教育出版社,2001.
[2] 杨小龙,何美丽,刘恩辰.机械类专业本科生创新能力培养的探索[J].科技经济导刊,2019(24):137-138.
[3] 宋志强.关于机械创新设计实例与实践的研究[J].呼伦贝尔学院学报,2008(1):96-99.
[4] 吴文兵,张云秀.平面机构自由度的计算[J].装备制造技术,2016(4):266-267.
[5] 赵永杰,程西云.机械原理课程探究式教学改革与探索[J].大学教育,2014(9):141-143.
[6] 孙桓,陈作模.机械原理[M].北京:高等教育出版社,2013.
[7] 于晓红,邱丽芳,韩建友,等.特殊情况下机构自由度的计算方法[J].机械,2001(6):20-21.
[8] 王远,邓婷婷,朱代根.“平面机构自由度计算”的教学与反思[C]//2016 年第十五届全国机械设计教学研讨会论文集,2016.
[9] Ball R S. A Treatise on the Theory of Screws[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1900.
[10] 黄真,刘婧芳.论机构自由度[M].北京:科学出版社,2011.
[11] Plucker J . On a New Geometry of Space.[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1865 (5):53-58.
[12] 韩忠义.机构自由度计算通用公式分析[J].黑龙江科技信息,2017(15):102.
[13] 卢文娟,张立杰,谢平,等.以对过约束的认识看自由度分析的历史发展[J].机械工程学报,2017 (15):81-92.
[14] 于苏民.平面机构自由度计算中常见错误分析[J].科技信息,2011(26):413-414.

Research on Application of Common Constraint Model of Closed Chain Mechanism to Expanding the Degree of Freedom in Calculation Teaching

DENG Kongshu[a], ZENG Lu[a], YIN Zhurong[a], LI Yuanyuan[b]

(a. Hunan Provincial Key Laboratory of Health Maintenance for Mechanical Equipment / Engineering Research Center of Advanced Mining Equipment, Ministry of Education;
b. School of Arts, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: Mechanism freedom plays an important role in Theory of Machines and Mechanisms, and is the first thing that should be known in further study of any other innovative mechanisms. In view of the monotony in the teaching classes the paper, with the purpose to cultivate students' innovative thinking, aims at enlightening colleges and universities students to understand the conception of mechanism freedom. Based on the original teaching thoughts of mechanism freedom, the paper proposes a new thought of an auxiliary closed chain mechanism with three common constraints models, which provides reference for teaching patterns that cultivate innovated talents under the Belt and Road Initiative in new era.

Key words: mechanism freedom; teaching approach; closed chain mechanism; three common constraints; innovative talents

(责任校对　刘兰霞)